

## Oplossingen Hoofdstuk 5

Hieronder staan oplossingen van enkele vragen uit Hoofdstuk 5.

2. (a)  $\text{Spec}(A) = \{-1, 4\}$ . (b)  $\det(A) = 8$ ,  $\text{Tr}(A) = 6$ .

3.

- $\text{Spec}(A) = \{0, 4\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_0 = \text{vct}\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ .  
Een mogelijke schrijfwijze is  $E_4 = \text{vct}\{(1, 1, 1, 1)\}$ .

4.

- $A_1$ :
- $\text{Spec}(A_1) = \{2, 6\}$ .
  - Een mogelijke schrijfwijze is  $E_2 = \text{vct}\{(0, 1)\}$ ,  $E_6 = \text{vct}\{(-2, 1)\}$ .
  - $A_1$  is diagonaliseerbaar over  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ .
- $A_2$ :
- $\text{Spec}(A_2) = \{2, 4\}$ .
  - Een mogelijke schrijfwijze is  $E_2 = \text{vct}\{(1, -1)\}$ ,  $E_4 = \text{vct}\{(1, 1)\}$ .
  - $A_2$  is diagonaliseerbaar over  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ .
- $A_3$ :
- $\text{Spec}(A_3) = \{2, 1\}$ .
  - Een mogelijke schrijfwijze is  $E_1 = \text{vct}\{(-1, 0, 1)\}$ ,  $E_2 = \text{vct}\{(0, 1, 0)\}$ .
  - $A_3$  is niet diagonaliseerbaar over  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ .

$A_4$ : in  $\mathbb{C}$ :

- $\text{Spec}(A_4) = \{3, 1 + i, 1 - i\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_3 = \text{vct}\{(0, 1, -1)\}$ ,  
 $E_{1+i} = \text{vct}\{(-\frac{1}{2} - i, -\frac{1-i}{4}, 1)\}$ ,  $E_{1-i} = \text{vct}\{(-\frac{1}{2} + i, -\frac{1+i}{4}, 1)\}$ .
- $A_4$  is diagonaliseerbaar over  $\mathbb{C}$ .

in  $\mathbb{R}$ :

- $\text{Spec}(A_4) = \{3\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_3 = \text{vct}\{(0, 1, -1)\}$ .
- $A_4$  is niet diagonaliseerbaar.

5.

(b)  $\text{Spec}(A^{10} + A^7 + 5A) = \{7, 1162\}$ .

(c)  $(1025 \ 2050 \ 3076)^T$

7.  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{2} - y - \frac{z}{2}, \frac{x}{2} + 2y - \frac{z}{2}, \frac{x}{2} + y + \frac{7}{2}z\right)$

9. Kies bijvoorbeeld  $\alpha = \{(0, -1, 1), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ .

10.

(a)  $\text{Spec}(T) = \{-2, 0, 7\}$ .

(b) Een mogelijke schrijfwijze is

- $E_{-2} = \text{vct}\{-v_1 + 2v_2 + v_3\}$ ;
- $E_0 = \text{vct}\{-v_1 - 2v_2 + 3v_3\}$ ;
- $E_7 = \text{vct}\{4v_1 + v_2 + 2v_3\}$ .

(d) 
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(e) 
$$Id_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Ja.

Bij deelvragen (d) en (e) is het antwoord niet uniek.

11.

- $\text{Spec}(T) = \{1, 2, 3\}$ .
- Bijvoorbeeld  $\alpha = \{1, X, X^2\}$ .

12.

- $\text{Spec}(D) = \text{Spec}(D^2) = \{0\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_0(D) = \text{vct}\{1\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_0(D^2) = \text{vct}\{1, x\}$ .

13.

(a)

- $\text{Spec}(T_k) = \{-1, 1, k\}$ .
- $k = -1$ : Een mogelijke schrijfwijze is  $E_{-1} = \text{vct}\{v_2 - v_3\}$ ,  $E_1 = \text{vct}\{v_1 + v_2 - v_3\}$ .
- $k = 1$ : Een mogelijke schrijfwijze is  $E_{-1} = \text{vct}\{v_1 + v_2 - 2v_3\}$ ,  $E_1 = \text{vct}\{v_1, -v_2 + v_3\}$ .
- $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ : Een mogelijke schrijfwijze is

$$E_{-1} = \text{vct}\{(1+k)v_1 + 2v_2 - (3+k)v_3\},$$

$$E_1 = \text{vct}\{v_1 + v_2 - v_3\},$$

$$E_k = \text{vct}\{v_2 - v_3\}.$$

(b)  $T_k$  is diagonaliseerbaar over  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  voor  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Voor  $k = -1$  is  $T_k$  zowel over  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{C}$  niet diagonaliseerbaar.

(c) Kies bijvoorbeeld  $D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  en  $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -(3+k) \end{pmatrix}$ .

**14.**

- $\text{Spec}(A^{25}) = \{-1, 1\}$ .
- Een mogelijke schrijfwijze is  $E_{-1} = \text{vct}\{(-2, 1, -1)\}$ ,  $E_1 = \text{vct}\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ .

**15.**  $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}$ .

**18.**  $T_{a,b}$  is diagonaliseerbaar voor alle  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**20.** Over 1 jaar zijn er 968 750 werklozen en 3 531 250 mensen aan het werk. Over 2 jaar zijn er strikt genomen 1 349 609.375 werklozen en 3 150 390,625 werkenden. In realiteit worden deze getallen naar gehele getallen afgerond. Over 100 jaar zijn er 3 000 000 werklozen en 1 500 000 werkenden.

**21.** Merk op dat we de percentages berekenen op het moment dat de diploma's worden behaald; dit gebeurt respectievelijk *in* (en niet *na*) het zesde en tiende semester. De matrix moet dus 5 en 9 keer werken op de vector die de beginsituatie, in semester 1, voorstelt.

$$(a) x_6 \approx \begin{pmatrix} 0.326 \\ 0.477 \\ 0.197 \end{pmatrix}.$$

$$(b) x_{10} \approx \begin{pmatrix} 0.303 \\ 0.497 \\ 0.200 \end{pmatrix}.$$