GERÇEKTEN BİLMENİZ GEREKEN 50 MATEMATİK FİKRİ

TONY CRILLY

Çeviri: Cem Duran

domingo

İçindekiler

Giriş

Matematik öylesine engin bir konudur ki, tek bir kişinin hepsini bilmesine imkân yoktur. Bu yüzden matematikçiler her alan hakkında fikir sahibi olduktan sonra kendi kişisel yollarını çizer. Kitabımızdaki konular bizleri başka zamanlara, başka kültürlere ve matematikçileri asırlardır meşgul eden fikirlere götürecek.

Matematik hem kadim, hem moderndir; gelişimi boyunca yaygın kültürel ve siyasi etkilerle iç içe olmuştur. Modern sayı sistemimiz Hintliler ve Araplardan geliyor olsa da, tarih boyunca üzerine yapışıp kalan midyeleri beraberinde taşır. Babillilerin bundan dört ila beş bin yıl önce kullandığı 60 tabanının izlerini modern kültürde görmek mümkündür: bir dakikada 60 saniye ve bir saatte 60 dakika vardır. Dik açı ise, Fransızların devrim sonrası her şeyi onluk tabana geçirdikleri sırada 100 grad yapmalarına rağmen, hâlâ 90 derecedir.

Modern çağın teknolojik zaferlerinin temelinde matematik yatar. Dolayısıyla okuldayken matematikte ne kadar kötü olduğunuzdan matah bir şeymiş gibi bahsetmenin de pek bir esprisi kalmadı artık. Gerçi okul matematiği ayrı mesele – ders sırasında genelde aklın bir köşesinde hep sınavlar olur. Okuldaki zaman baskısının da duruma yardımcı olduğunu söylemek güç; sonuçta hız, gerçek matematikte bir erdem sayılmaz. Fikirlerin sindirilebilmesi için zaman gerekir. Bazı en büyük matematikçiler bile derinliklerine vakıf olabilmek için üzerinde çalıştıkları konuları eziyet verecek düzeyde yavaştan almışlardır.

Telaşa bizim kitabımızda da yer yok. Canınız nerden isterse oradan başlayabilirsiniz. Belki önceden kulak aşinalığınız olan fikirlerin gerçekten ne anlama geldiğini sakin bir şekilde keşfedin. Sıfır'ın hikâyesinden ya da dilediğiniz başka bir yerden başlayarak matematiksel fikir adaları arasında güzel bir gezintiye çıkabilirsiniz. Örneğin Oyun kuramı hakkında fikir sahibi olduktan sonra sihirli kareleri okuyabilirsiniz. Ya da altın dikdörtgenlerden Fermat'nın meşhur son teoremine geçebilirsiniz. Tamamen size kalmış.

Matematik açısından heyecanlı bir çağda yaşıyoruz. En temel sorulardan bazıları geçtiğimiz yıllarda yanıt buldu. Modern bilgisayarlar bazı sorularda yardımımıza koşarken bazılarında çaresiz kaldı. Dört-renk problemi bilgisayarların yardımıyla çözüldü ama örneğin kitabın son bölümünde ele aldığımız Riemann hipotezini ne bilgisayarlarla, ne de başka yöntemlerle çözebilmiş değiliz.

Matematik herkes içindir. Sudokunun popülerliği geniş kitlelerin (bilmeden de olsa) matematikten zevk alabileceğinin bir göstergesi. Nasıl ki resimde veya müzikte dehalar çıkmışsa matematikte de benzer bir durum vardır. Ama dehalar hikâyenin tamamını anlatmaz. Bazı öncü isimlerin farklı bölümlerde tekrar tekrar ortaya çıktığını göreceksiniz. Bunlardan birisi 18. yüzyılda yaşamış olan Leonhard Euler. Fakat matematikteki gerçek ilerlemeler, çoğunluğun yüzyıllar içinde üst üste konan çabalarıyla ortaya çıkar. Seçilen konu sayısının 50 olması keyfi olsa da konuları dengeli dağıtmaya çalıştım. Biraz soyut, biraz uygulamalı; biraz eski, biraz yeni; biraz günlük hayatın içinden ve biraz ileri düzey matematiğe yer verdim. Öte yandan matematiğin bir bütün olduğunu da akıldan çıkarmamak gerek. Asıl zorluğu konuları seçerken değil, elerken yaşadım. Kitapta 500 fikir de yer alabilirdi gerçi, ama matematik kariyerinize başlamanız için 50 yeterli gibi duruyor.

01 Sıfır

Sayılar diyarında gezinmeye küçük yaşlarda başlarız. "Sayı alfabesi"nin ilk harfinin 1 olduğunu da o dönemde öğreniriz. Saymaya hep onunla başlarız: 1, 2, 3, 4, 5, ... Sayma sayıları, adından da anlaşılacağı üzere nesneleri, örneğin elmaları, portakalları, muzları veya armutları saymamıza yarar. İçi boş sepette kaç elma olduğunu saymayı ise daha sonra öğreniriz.

Ne bilim ve matematiği dev adımlarla ileri götüren Antik Yunanlar, ne de mühendislikte müthiş başarılara imza atan Romalılar boş sepetteki elma sayısını gerektiği gibi ifade edemezdi. Hiçliği ifade eden sayıya henüz bir ad konmamıştı. Romalılar sayıları I, V, X, L, C, D ve M harflerini değişik şekillerde bir araya getirerek gösteriyorlardı fakat 0'a yer vermemişlerdi. 0 sayılarda yoktu.

Sıfır nasıl kabul gördü? "Hiçliği" gösteren bir simgenin kullanılmaya başlanması bundan binlerce yıl önce oldu. Günümüzdeki Meksika'da yaşamış olan Maya uygarlığı sıfırı farklı şekillerde kullanmıştı. Onlardan bir süre sonra, Babillilerden etkilenen gökbilimci Klaudyos Batlamyus, kendi sayı sisteminde modern 0'a benzer bir simgeyi yer belirteci olarak kullandı. Bu sayede örneğin 75 ve 705 sayılarını Babillilerin yaptığı gibi bağlama göre ayırt etmek yerine doğrudan ayırt etmek mümkün hale geliyordu. Bunu dildeki virgüle benzetebiliriz: her ikisi de mümkün olan anlamlardan hangisinin kastedildiğini saptamamıza yardımcı olur. Ve tıpkı virgülde olduğu gibi, sıfır için de kuralların belirlenmesi gerekiyordu.

Yedinci yüzyılda yaşamış Hintli matematikçi Brahmagupta, sıfırı bir yer belirteci olmanın ötesinde bir sayı olarak kabul etti ve sıfırla yapılabilecek işlemlerle ilgili kuralları belirlemeye çalıştı. Örneğin pozitif bir sayıyla sıfırın toplamı aynı pozitif sayı, sıfırla sıfırın toplamı ise yine sıfır etmeliydi. Sıfırı bir yer belirtecinden ziyade bir sayı olarak ele alması açısından çağının çok ilerisindeydi. Sıfıra bu şekilde yaklaşan Hint-Arap sayı sisteminin, Batıya ayak basmak için 1202'ye kadar, yani Pisa'lı Leonardo Fibonacci'nin *Liber Abaci* (*Sayı Sayma Kitabı*) adlı

dönem

İÖ 700
Babilliler sıfırı sayı sistemlerinde yer belirteci olarak kullanır.

İS 628
Brahmagupta sıfırın diğer sayılarla olan ilişkilerini belirler.

eserini yayımlamasına kadar beklemesi gerekecekti. Kuzey Afrika'da büyüyen ve Hint-Arap aritmetiği üzerine eğitim alan Fibonacci, 0 sayısı ile Hint simgeleri olan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9'un birleşiminden oluşan sayı sisteminin gücünü takdir etmekte gecikmemişti.

Sayı sistemine sıfırın eklenmesi, Brahmagupta'nın üstesinden gelmek için çaba sarf ettiği bazı sorunları da beraberinde getirmişti: sayı sistemine yeni katılan bu elemana nasıl davranmak gerekiyordu? Kendisi iyi kötü bir başlangıç yapmışsa da üstü kapalı yanıtlar bulduğuyla kalmıştı. Sıfır, varolan aritmetik sistemine kesin kurallarla nasıl dahil edilebilirdi? Toplama ve çarpmada 0 yerine güzelce oturuyordu, ama iş çıkarma ve bölmeye gelince bu "yabancı" yerini yadırgamışa benziyordu. Sıfırın kabul edilmiş olan aritmetikle uyumlu davrandığına emin olmak için bazı şeyleri anlamlandırmak gerekiyordu.

Sıfırla nasıl işlem yapılır? Sıfırla toplamak ve çarpmakta anlaşılmayacak bir şey yoktur. 10 sayısına 0 ekle dendiğinde 0'ı sona ekleyerek 100 elde etmek mümkün tabii, ama bizim buradaki kastımız toplamaktır. Bir sayıya 0 eklediğimizde sayı yine aynı kalır. 0 ile çarptığımızdaysa sonuç hep 0 olur. Örneğin $7+0=7$ ve $7\times 0=0$ olur. Çıkartma basit bir işlem olsa da sonucun negatif olabileceğine dikkat etmek gerekir: $7-0=7$ ve $0-7=-7$ olur. Asıl sorunlar bölmede ortaya çıkar.

Bir ölçüm çubuğuyla belirli bir uzunluğu ölçtüğümüzü hayal edin. Çubuğun uzunluğu 7 birim olsun. Ölçeceğimiz uzunluğa bu çubuklardan kaç tanesinin uç uca sığacağını öğrenmek istiyoruz. Eğer ölçeceğimiz uzunluk 28 birimse, $28\div 7=4$ çubuk uzunluğunda demektir. Bunu göstermenin daha iyi bir yolu şudur:

$$\frac{28}{7} = 4$$

Ardından "içler-dışlar çarpımı" yaparak ifadeyi $28 = 7 \times 4$ şeklinde yazıp sağlamasını yapabiliriz. Aynı mantıkla 0'ı 7'ye bölmeyi deneyelim. Bu işlemin yanıtı a olsun:

$$\frac{0}{7} = a$$

830
Mahavira sıfırla yapılabilecek işlemler konusunda fikirler geliştirir.

1100
Bhaskara sıfırı cebirde kullanır ve nasıl kullanılabileceğini göstermeye çalışır.

1202
Fibonacci sıfırı aynı kategoriye koymasa da 1'den 9'a kadar olan Hint-Arap rakamlarına ekler.

İçler dışlar yaparsak: $0 = 7 \times a$ olur ki a'nın alabileceği tek değer 0'dır: sonuçta iki sayının çarpımı 0 ediyorsa, en az biri 0 olmalıdır.

Ne var ki 0'la ilgili asıl sorun bu değil. Asıl sorun 0'a bölünce ortaya çıkar. Eğer $^7/_0$ işlemine de $^0/_7$'de yaptığımız gibi yaklaşırsak

$$\frac{7}{0} = b$$

elde ederiz. İçler-dışlar yapınca $0 \times b = 7$ olur ki buradan $0 = 7$ gibi saçma bir sonuca ulaşırız. Eğer $^7/_0$'ın bir sayı olduğunu kabul edersek büyük çaplı bir sayısal karmaşaya zemin hazırlamış oluruz. Bunun önüne geçmenin yolu $^7/_0$'ın tanımsız olduğunu söylemektir. Basitçe söyleyecek olursak, 7'yi (veya başka bir sayıyı) 0'a bölme işlemi hiçbir anlam ifade etmediğinden bu işleme izin vermeyiz. Aynı şekilde örneğin bir sözcüğün orta,sına anlamsızlığa yol açmadan virgül yerleştiremeyiz.

Brahmagupta'nın izinden giden 12. yüzyıl Hint matematikçisi Bhaskara, 0'a bölünme üzerinde yaptığı çalışmalar sonucunda, bir sayıyı sıfıra bölersek sonsuz elde edeceğimizi ileri sürdü. Bu akla yatkın görünüyordu, çünkü bir sayıyı çok küçük bir sayıya bölersek sonuç çok büyük bir sayı olur. Örneğin 7'yi 0,1'e böldüğümüzde 70 elde ederiz; 0,01'e böldüğümüzde ise 700. Paydadaki sayı ne kadar küçülürse sonuç o kadar büyür. Bu mantıkla mutlak küçüklük olan 0'da cevabın sonsuz olması gerekir. Fakat bunu doğru kabul edersek, daha da akıl almaz bir kavram olan sonsuzluğu açıklamak durumunda kalırız. Sonsuzlukla başa çıkma çalışmalarımız ise bu aşamada sonuç vermeyecektir, çünkü sonsuzluk (standart gösterimiyle ∞) aritmetiğin genel kurallarına uymaz ve bu bakımdan bir sayı olarak kabul edilemez. [Eğer $^7/_0 = \infty$ olduğunu kabul edersek, $0 \times \infty = 7$ olması gerekir. Ama aynı zamanda $^8/_0 = \infty$ ve $0 \times \infty = 8$ olduğundan, $0 \times \infty$'un hem 7 hem de 8'e eşit olması gerekir ki bu klasik aritmetik kuralları çerçevesinde mümkün değildir. *ç.n.*]

$^7/_0$ bu kadar sorunlu olduğuna göre, daha da garip bir ifade olan $^0/_0$ için ne söyleyebiliriz? $^0/_0 = c$ gibi bir sayı olsun. İçler-dışlar çarpımı yaparsak $0 = 0 \times c$ ve buradan $0 = 0$ elde ederiz. Bu belki çok aydınlatıcı bir sonuç olmadı ama hiç olmazsa anlamsız değil. Hatta burada *c her sayı* olabilir ve bir önceki gibi sonsuzlukla karşılaşmayız. Buradan $^0/_0$ ifadesinin her sayıya eşit olabileceği sonucu çıkar. Matematik çevrelerinde buna "belirsiz" deriz.

Sadede gelirsek, en iyisi hesaplama yaparken 0'a bölme işlemini işin içine hiç sokmamaktır. Aritmetik onsuz da gayet güzel yürür.

Sıfır ne işe yarar? En basit ifadesiyle, sıfır olmasa bilim de olmazdı. Sıfırıncı boylam, sıfır derece sıcaklık, sıfır enerji ve sıfır kütleçekimi bunun örnekleridir. Hatta sıfırdan başlamak, sıfır tolerans, sıfır hata gibi sayısız terimle günlük konuşma dilimize girmiştir.

Daha bile çok girebilirdi gerçi. Eğer New York'ta 5. caddeden Empire State binasına adım atarsanız, kendinizi 1. katın muhteşem giriş lobisinde bulursunuz. Sayılarla sıralama yaparken genelde bu şekilde 1'den başlarız. ABD dışında dünyanın büyük bölümünde katlar 0'dan sayılmaya başlansa da insanlar genelde "sıfırıncı kat" terimini kullanmayı tercih etmez.

Hiçlikle ilgili her şey

Sıfırla pozitif bir sayının toplamı pozitiftir.

Sıfırla negatif bir sayının toplamı negatiftir.

Pozitif ve negatif bir sayının toplamı farkları kadardır. Sayıların mutlak değeri eşitse, sıfırdır.

Sıfırın pozitif veya negatif bir sayıya bölümü sıfırdır.

Brahmagupta, MÖ 628

Matematik sıfır olmadan çalışmaz. Sayı sistemi, cebir ve geometrinin işlemesini sağlayan matematiksel kavramların özünde yer alır sıfır. Sayı doğrusunda pozitif ve negatif sayıları birbirinden ayırdığından dolayı özel bir konuma sahiptir. Onluk sistemdeyse sıfır, hem devasa sayıları, hem de mikroskobik küçüklükleri ifade etmemizi sağlayan bir yer belirteci görevi görür.

Sıfır, asırlar içinde kabul görmüş ve kullanılmaya başlanmış, insanoğlunun en büyük keşifleri arasında yer almıştır. 19. yüzyıl Amerikan matematikçisi G.B. Halsted, Shakespeare'in *Bir Yaz Gecesi Rüyası* adlı oyunundan bir cümleyi uyarlayarak, sıfırın icadının cisimsiz hiçliğe bir ikâmetgah ve bir isim, bir görünüş, bir simge vermekle kalmayıp, faydalı bir güç kazandırdığını, bunun da bağrından çıktığı Hint ırkının bir özelliği olduğunu dile getirmiştir.

Sıfır ilk tanıtıldığında insanlara garip gelmiş olsa gerek; fakat matematikçilerin, faydaları çok uzun zaman sonra ortaya çıkacak olan kavramlarla uğraşmak gibi bir huyları vardır. Sıfırın günümüzdeki bir benzeri ise boş küme, yani içinde hiç eleman olmayan kümedir. Bu da tıpkı sıfır gibi garip olmanın yanında yine onun gibi olmazsa olmaz bir kavramdır.

» fikrin özü
Hiçlik deyip geçmemek lazım

02 Sayı Sistemleri

Sayı sistemleri, “kaç tane” sorusunu yanıtlayabilmek için geliştirilmiş olan yöntemlerdir. Farklı kültürler farklı dönemlerde “bir, iki, üç ve çok”tan oluşanlardan tutun, günümüzde kullandığımız oldukça karmaşık onluk basamak değerli gösterime kadar değişik yöntemler kullanmışlardır.

4000 yıl önce, günümüzde Suriye, Ürdün ve Irak’a ev sahipliği yapan coğrafyada yaşamış olan Sümerler ve Babilliler, günlük hayatta basamak değerli bir sistem kullanıyorlardı. Bu sistemlere basamak değerli denmesinin nedeni, simgelerin değerlerinin bulundukları yere bağlı olmasıdır. Ayrıca kullandıkları 60 tabanlı sistemin bir kalıntısı olarak saat sistemimizde bir saatte 60 dakika, bir dakikada ise 60 saniye vardır. Metrik sisteme geçildiği dönemde dairenin tamamını 400 grad (dolayısıyla dik açıyı 100 grad) yapma girişimlerine rağmen bu değişiklik uzun dönemde tutmamış, 360 dereceye geri dönülmüştür.

Kadim atalarımız sayılarla asıl pratik yararları için ilgilenmiş olsalar da, matematiğin kendisinden de etkilendikleri ve matematiksel gerçekleri günlük hayattaki faydalarından bağımsız olarak keşfetmeye çalıştıkları yönünde kanıtlar bulunuyor. Bunların arasında bazı cebir konularını ve geometrik şekillerin özelliklerini sayabiliriz.

Hiyeroglifle yazılan MÖ 13. yüzyıldan kalma Mısır sayı sistemi 10 tabanını kullanıyordu. İlginç bir not olarak Mısırlılar kesirli sayılar için kendi sistemlerini geliştirmişlerdi. Fakat bizim bugün kullandığımız sistem Babillilerden kalma ve sonradan Hintlilerin arıttığı bir sistemdir. En büyük avantajı hem çok küçük, hem de çok büyük sayıların kolayca yazılabilmesidir. Topu topu on adet simge kullanarak (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) hesaplamalar kolayca yapılabilir. Bu kolaylığı takdir edebilmek için Romen sistemiyle karşılaştırabiliriz. Romalıların işini görse de bu sistemde hesaplama yapabilmek yalnızca sistemin uzmanlarına özgüydü.

dönem

İÖ 30000

Avrupa’daki taş devri insanları kemiklerin üzerine sayı işaretleri yapar.

İÖ 2000

Babilliler sayıları göstermek için simgeler kullanır.

Romen sistemi Romalıların kullandığı temel simgeler "onluklar" (I, X, C ve M) ve bunların "yarılar"ıdır (V, L, D). Bu simgeler bir araya getirilerek diğer sayılar oluşturulur. Bir görüşe göre I, II, III ve IIII parmaklarımızın, V ise elimizin görünüşünden türetilmiştir. İki V'nin (veya iki elin) birleştirilmesinden ise X, yani on sayısını elde ederiz. C harfi Latince yüz demek olan *centum*'dan, M ise bin demek olan *mil*'den gelir. Romalılar ayrıca "yarım" anlamında S harfini ve 12 tabanında bir kesir sistemi kullanırdı.

Romen sisteminde simgelerin önce veya sonra olmasına göre anlamları değişirdi, fakat bunun genel kabul görmüş bir yöntem olmadığı anlaşılıyor. Antik Romalılar dördü IIII diye yazmayı tercih ederlerdi; IV şeklinde yazma yöntemi ise daha sonra çıkmıştı. Dokuzu IX diye yazdıkları olurdu, fakat SIX [İng. altı. *ç.n.*] yazarsanız bunu sekiz buçuk olarak anlarlardı! Roma sistemindeki rakamları, Ortaçağ'daki bazı eklemelerle birlikte yanda görüyorsunuz.

Romen Rakamları

Roma İmparatorluğu		Ortaçağ'daki eklemeler	
S	yarım		
I	bir		
V	beş	$\overline{V}$	beş bin
X	on	$\overline{X}$	on bin
L	elli	$\overline{L}$	elli bin
C	yüz	$\overline{C}$	yüz bin
D	beş yüz	$\overline{D}$	beş yüz bin
M	bin	$\overline{M}$	bir milyon

Romen rakamlarıyla işlem yapmak kolay değildir. Örneğin MMMCDXLIIII sayısının kaç olduğunu ancak zihnimizde sayıyı (MMM)(CD)(XL)(IIII) şeklinde parçalara ayırıp 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444 diye hesaplayarak görebiliriz. Şimdi de MMMCDXLIIII + CCCXCIIII toplamını bulmayı bir deneyin. Bu işte ustalaşmış bir Romalı, çeşitli kısayollar ve numaralarla doğru yanıtı bulabilirdi, ama bizim bu işlemi yapabilmemiz için önce sayıları onluk sisteme çevirmemiz, ardından sonucu tekrar Romen sistemine çevirmemiz gerekir:

Toplama

3444	→	MMMCDXLIIII
+ 394	→	CCCXCIIII
= 3838	→	MMMDCCCXXXVIII

İki sayının çarpılmasıysa çok daha zordur ve bazen Romalılar için bile imkânsız olabilir! 3444 ile 394'ü Romen rakamlarıyla çarpmak için Ortaçağ'da kullanılmaya başlanan ek yöntemler gerekir.

İS 600
Hintliler ondalık sistemimizin öncüsü olan bir sistem kullanır.

1200
0 ve 1'den 9'a rakamları içeren Hint-Arap sayı sistemi yayılır.

1600
Ondalık sistemin simgeleri modern biçimine kavuşur.

Çarpma

	3444	→	MMMCDXLIIII
×	394	→	CCCXCIIII
=	1.356.936	→	$\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{V}}\mathrm{MCMXXXVI}$

Romalıların sıfır için belirli bir simgeleri yoktu. Eğer vejetaryen bir Roma vatandaşından o gün kaç şişe şarap içtiğini yazmasını isteseydiniz III yazabilirdi ama kaç tavuk yediğini sorsaydınız 0 yazamazdı. Roma rakamlarının kalıntılarına bazı kitapların sayfa numaralandırmalarında (gerçi bizimkinde kullanmadık) ve binaların yapım yılını gösteren kitabelerinde rastlayabilirsiniz. Örneğin 1900 sayısı için kullanılan MCM gibi bazı gösterimler Romalılar tarafından asla kullanılmamış, modern zamanlarda estetik nedenlerden dolayı ortaya çıkmışlardır. Romalılar 1900'ü MDCCCC diye yazarlardı. Fransa kralı on dördüncü Louis, ya da standart yazılışıyla XIV. Louis, aslında adının XIIII. Louis diye yazılmasını tercih ederdi. Hatta daha da ileri giderek saatlerdeki dördün IIII şeklinde yazılmasını yasal zorunluluk haline getirmişti.

XIIII. Louis devrinden bir saat

Onluk tam sayılar Sayı denince aklımıza doğal olarak ondalık sayılar gelir. Onluk sistem on tane rakam üzerine kuruludur: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9. Sayıların 10'un katlarına göre düzenlenmesine dayanır. Örneğin **394** diye yazdığımız sayı **3** tane yüz, **9** tane on ve **4** tane birden oluşur. Bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 100 + \mathbf{9} \times 10 + \mathbf{4} \times 1$$

Ya da istersek aynı sayıyı onun "üs"lerine (veya kuvvetlerine) göre yazabiliriz:

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 10^2 + \mathbf{9} \times 10^1 + \mathbf{4} \times 10^0$$

Burada $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ ve $10^0 = 1$ eder. Bu son ifadede, sisteme neden onluk dendiği daha net görülüyor.

Ondalık virgülü Şu ana kadar tamsayıların gösterimine baktık. Onluk sistem, örneğin $^{572}\!/_{1000}$ gibi bir sayıyı da gösterebilir mi? Bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{572}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{2}{1000}$$

Paydalarda yer alan 10, 100 ve 1000'i, 10'un negatif kuvvetleri olarak yazarsak:

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

Bu da **0,572** olarak yazılabilir. Bunu örneğin **394** sayısına eklersek $394\,{}^{572}/_{1000}$ sayısını elde ederiz ki bunun onluk sistemdeki yazılışı da son derece kolaydır: **394,572**.

Çok büyük sayıların gösteriminde okuma kolaylığı sağlamak adına "bilimsel gösterim"i tercih ederiz. Örneğin 1.356.936.892 sayısını $1{,}356936892 \times 10^9$ olarak yazabiliriz. Hesap makinelerinde veya bilgisayarlarda bu sayı genelde 1,356936892 × 10E9 olarak gösterilir. Sayıdaki basamak adedi, 10'un üssü olan 9'un bir fazlasına eşittir. E harfi ise İngilizcedeki "üstel" anlamına gelen "exponential" sözcüğünün baş harfidir. Kimi zaman daha bile büyük sayılara ihtiyacımız olduğunda bilimsel gösterim hayatımızı kolaylaştırır. Örneğin evrendeki hidrojen atomu sayısı yapılan tahminlere göre $1{,}7\times10^{77}$'dir. Keza çok küçük sayıları göstermek de bilimsel gösterimde çok basittir; bu sefer örneğin $1{,}7\times10^{-77}$'de olduğu gibi 10'un üssü negatif olur. Böylesi sayıları Romen rakamlarıyla göstermeye kalmak ise pek akıl kârı değildir.

2'nin kuvvetleri	Ondalık
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Sıfırlar ve birler 10 tabanı günlük hayatta egemenliğini ilan etmesine rağmen bazı uygulamalar farklı tabanlar kullanır. Modern bilgisayarların temelinde 2 tabanını kullanan ikilik sistem yatar. Bu sistemin güzel yanı her sayının 0 ve 1'lerin bileşkesi olarak ifade edilebilmesidir. Kötü yanı ise sayıların çok daha uzun yazılmasıdır.

394 sayısını ikilik sistemde yazmayı deneyelim. Bu sefer 10'un kuvvetlerini değil, 2'nin kuvvetlerini kullanacağız. Biraz hesaptan sonra şu ifadeyi elde ederiz:

$$394 = 1\times256 + 1\times128 + 0\times64 + 0\times32 + 0\times16 + 1\times8 + 0\times4 + 1\times2 + 0\times1$$

0 ve 1'leri yan yana yazacak olursak **394**'ün ikilik sistemde **110001010** olduğunu görürüz. İki tabanındaki ifadeler çok uzun olduğu için bazen taban olarak 2'nin kuvvetleri olan 8 ve 16 kullanılır. 8'lik sistemde kullandığımız simgeler 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7; 16'lık sistemde ise 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E ve F'dir. Örneğin 394 sayısı 16 tabanında (A, 10 sayısını temsil etmek üzere) 18A olur. Çocuk oyuncağı! Özellikle de söz konusu oyuncak ikilik sistemi kullanan elektronik bir oyuncaksa.

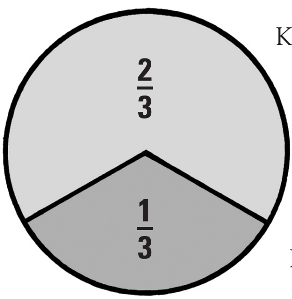
» fikrin özü
Sayıların kağıda dökülüşü

03 Kesirler

Kesir, sözcüğün gerçek anlamıyla, sayının parçalara "kesilmesi" demektir.* Şimdi gelin parçalara ayırma denilince ilk akla gelen örnek olan meşhur pastayı kesmeye başlayalım.

Üçe ayrılmış bir pastanın iki parçasını alan kişi $\frac{2}{3}$'ünü almış olur. Diğer bahtsız kişiye ise $\frac{1}{3}$ kalır. Parçaları geri birleştirirsek yine tamamını elde ederiz: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Bulduğumuz 1 sayısı, pastanın tamamı anlamına gelir.

Bir başka örnek: İndirimdeki tişört asıl fiyatının beşte dördüne satılıyor. Burada kesri $\frac{4}{5}$ olarak yazar, "dört bölü beş" veya daha ziyade "beşte dört" diye söyleriz. Yine dikkat ederseniz $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ olur ki buradaki 1 orijinal fiyatı gösterir.



Kesirler, bir tam sayı bölü bir başka tam sayı biçimindedir. Bütünün kaç paya ayrıldığını gösteren alttaki sayıya "payda" ve kaç payın alındığını gösteren üstteki sayıya "pay" denir. Dolayısıyla kesrin genel biçimi şöyledir:

$$\frac{\text{pay}}{\text{payda}}$$

Pasta örneğinde yemek istediğiniz kısım 3 payda 2 pay, yani $\frac{2}{3}$'tür.

$\frac{14}{5}$ gibi payın paydadan büyük olduğu kesirler de vardır. Bunlara bileşik kesir denir. 14'ü 5'e bölersek bölüm 2, kalan 4 olur. Yani 14'ün içinde iki tane 5 vardır, 4 ise artar. Bunu "tam sayılı kesir" olarak $2\frac{4}{5}$ şeklinde yazabilir, böylece tam kısım artı "basit kesir"e çevirebiliriz. Bazı eski yazarlar bunu $\frac{4}{5}2$ şeklinde yazardı. Genelde kesirler yazılırken sadeleşme yapılabiliyorsa yapılır, böylece pay ve paydanın ortak çarpanı olmaz. Örneğin $\frac{8}{10}$ kesrinde pay ve paydada 2

* Burada kesirden kasıt, "bayağı kesir"dir. Bayağı kesirler, a ve b tamsayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilen kesirlerdir. (*ç.n.*)

dönem

İÖ 1800

Babilliler kesirli sayıları kullanır.

İÖ 1650

Mısırlılar birim kesirlerden faydalanır.

çarpanı ortaktır (8 = 2 × 4 ve 10 = 2 × 5). Pay ve paydadaki 2 çarpanını sadeleştirdiğimizde geriye $^4/_5$ kalır.

Toplama ve çarpma Kesirlerle ilgili tuhaf bir özellik, çarpmanın toplamadan daha kolay olmasıdır. Tam sayıları çarpmanın zorluğundan dolayı insanlar çeşitli numaralar bulmak zorunda kalmıştır. Halbuki kesirlerde daha zor olan çarpma değil, toplamadır.

Önce çarpmayla başlayalım. Eğer 30 liralık tişörtü beşte dördü fiyatına alırsanız 24 lira verirsiniz. Bunu bulmak için önce 30'u 5 eşit parçaya böler ($^{30}/_5 = 6$), ardından 4 parçasının değerini hesaplarız (6 × 4 = 24).

Satışların hâlâ istediği gibi artmadığını gören mağaza müdürü bir indirim daha yapıyor ve tişörtleri indirimli fiyatın da $^1/_2$'sine düşürdüklerini açıklıyor. Artık tişörtler 12 lira. Eğer art arda yapılan bu iki indirimi çarparsak toplam indirimi bulabiliriz. Yapmamız gereken payları kendi, paydaları kendi aralarında çarpmak:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10}$$

Eğer müdür iki indirimi tek seferde yapmak isteseydi, tişörtleri ilk fiyatın onda dördüne satması gerekirdi. Bir başka deyişle $^4/_{10} \times 30 = 12$ liraya.

İki kesri toplamak ise farklı bir konudur. $^1/_3 + {}^2/_3$ gibi bir toplamda bir sorun çıkmaz, çünkü paydalar aynıdır. İki sayının paylarını ekleyip $^3/_3$, yani 1 buluruz. Peki ama bir pastanın üçte biriyle beşte ikisini nasıl toplayabiliriz? $^1/_3 + {}^2/_5$ kaç eder? Eğer payları ve paydaları kendi aralarında toplayabilseydik ne güzel olurdu; hemen $^3/_8$ bulurduk. Ama ne yazık ki bu yöntem doğru sonucu vermez.

Kesirleri toplayabilmek için önce paydalarının aynı olmasını sağlamalıyız. İki kesrin paydaları olan 3 ve 5'in ortak katları 15 olduğu için birincisini 5 ile, ikincisini 3 ile genişletelim. Bu durumda her ikisinin de paydaları 15 olur ve artık payları toplayabiliriz:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

İS 100	1202	1585	1700
Çinliler kesirli sayıları hesaplamak için bir sistem geliştirir.	Pisa'lı Leonardo (Fibonacci) kesirlerin çizgiyle gösterimini yaygınlaştırır.	Simon Stevin ondalık kesirlere dair bir kuram geliştirir.	Kesir çizgisi standart hale gelir ($^a/_b$ gibi).

Kesri ondalık sayıya çevirmek Bilim dünyasında ve çoğu matematik uygulamasında kesirli sayılar ondalıklı olarak ifade edilir. $^4\!/_5$ kesri $^8\!/_{10}$ ile aynıdır ki bunu 0,8 olarak yazabiliriz.

Paydasında 5 veya 10 olan kesirleri çevirmek kolaydır. Peki ama $^7\!/_8$ gibi bir kesri nasıl çevireceğiz? Burada asıl bilmemiz gereken şudur: İki tamsayıyı birbirine böldüğümüzde ya tam bölünür, ya da "kalan" adını verdiğimiz bir kısmı bölünmeye devam eder.

Şimdi gelin $^7\!/_8$ sayısını ondalığa nasıl çevireceğimize adım adım bakalım:

- 7 sayısının içinde kaç tane 8 var? Hiç yok veya 0 tane var. Bu durumda bölüm 0, kalan 7 eder. Bölümü kaydetmek için 0, ardından tamsayı kısmının bittiğini belirtmek için virgül koyarız: "0,"

- Kalanın sonuna bir 0 ekleyip (10'la çarpıp) 70 yapıyoruz. 70'in içinde kaç tane 8 var? 8 tane, çünkü $8 \times 8 = 64$. Dolayısıyla 70'in içindeki 8 tane 8'i alıyoruz, geriye $70 - 64 = 6$ kalıyor. Bölümün ikinci sayısı olan 8'i virgülden sonra yazıyoruz: "0,8"

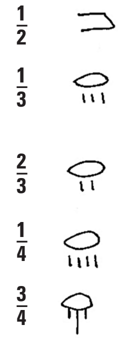
- Şimdi 60'ın (kalanın sonuna 0 koyduk) içinde kaç tane 8 var ona bakıyoruz. $7 \times 8 = 56$. Kalan ise $60 - 56 = 4$. Bölümün yeni hali "0,87"

- Kalan 4 olduğuna göre 40'ın içinde kaç 8 var? $5 \times 8 = 40$. Tamı tamına 5 tane. Dolayısıyla kalan 0. Kalan 0 olunca işlemin sonuna geldik demektir. *Nihai* cevap "0,875".

Bu çevrim reçetesini uyguladığımız her kesir, bir noktada mutlaka sonlanır diye bir şey yok! İşlem sonsuza kadar gidebilir. Örneğin $^{20}\!/_3$'ü ondalıklı yazmak istersek her adımda 20'yi 3'e bölerek 6 bölümünü ve 2 kalanını elde ederiz. Kalan asla 0 olmaz. Sonuçta sonsuza doğru uzayıp giden 6,666666... sayısını elde ederiz. Bunu kısaca $6{,}\overline{6}$ olarak gösteririz. Virgülden sonraki 6 sürekli "devrettiği" için bu sayılara devirli sayılar denir.

Bu şekilde sonsuza dek süren sayısız kesir vardır. $^5\!/_7$ gibi bir kesirde devreden kısım daha uzundur: $^5\!/_7 = 0{,}714285714285714285...$ Bir kesrin virgülden sonraki kısmı bir kez bu şekilde devretmeye başladı mı sonu gelmez. Burada 714285 kısmı devrettiğinden tamamının üstüne çizgi çekeriz: $0{,}\overline{714285}$.

Mısırlıların kesir gösterimleri Mısırlılar, milattan 2000 yıl önce hiyerogliflerle gösterdikleri *birim* kesirlere, yani paydaları 1 olan kesirlere dayanan bir kesir sistemi geliştirdi. Bunu günümüzde British Museum'da bulunan Rhind Papirüsü'nden biliyoruz. Bu o kadar karmaşık bir sistemdi ki sırlarına hakim olup doğru hesaplamalar yapabilmek için uzmanı olmak gerekiyordu.



Mısırlıların kesir gösterimleri

$^{2}/_{3}$ gibi bazı ayrıcalıklı kesirlerin kendi gösterimleri olsa da diğer tüm kesirler $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{11}$ veya $^{1}/_{168}$ gibi birim kesirlerin bileşimi olarak ifade ediliyordu. Bunlar, diğer tüm kesirlerin ifade edilebildiği "temel kesirler"di. Örneğin $^{5}/_{7}$ kesrini şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{168}$$

Aynı birim kesirden birden fazla kullanmaya izin yoktu. Sistemin kendiliğinden gelen bir özelliği, bazı kesirlerin birden fazla yazım şeklinin olmasıdır. Örneğin,

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

"Mısır açılımı"nın pratik faydaları kısıtlı olsa da soyut matematikçileri kuşaklar boyu etkilemiş ve bir kısmı hâlâ çözülememiş olan ilginç problemler sunmuştur. Örneğin *en kısa* Mısır açılımını veren yöntemlerin tam analizi, gözü pek matematikçileri beklemektedir.

» fikrin özü
Tamı parçalara ayırmak