

Enrique Gracián
HISTORIA DE LOS NÚMEROS

arpa

SUMARIO

PRÓLOGO	II
1. Los primeros números	15
2. Operaciones elementales	35
3. Grecia	67
4. Infinitos decimales	79
5. Organizando los números	93
6. Los generadores de números	109
7. El camino de los números primos	123
8. Conjeturas	191
9. Contar, medir y pesar	207
10. Textos de aritmética	225
11. ¿Existen los números?	245
12. Números infinitos	257

«Un matemático que no tiene algo de poeta
no será nunca un matemático completo».

K. WEIERSTRASS

PRÓLOGO

He dedicado una gran parte de mi vida a las matemáticas y, hasta ahora, no me había dado cuenta de la importancia absolutamente crucial que tienen los números en nuestra vida cotidiana y en nuestra organización social. No es algo que afecte a un tipo exclusivo de culturas o a un nivel de desarrollo tecnológico; los números y todo lo que estos involucran atañen a la especie humana en su conjunto. Desde siempre.

Esto me ha llevado a reflexionar sobre el origen y la naturaleza de los números, a cómo se han utilizado para construir los pilares sobre los que se asientan todas las ciencias y también a la manera en como hemos diseñado la forma de enseñarlos. Me ha llevado, en definitiva, a escribir este libro.

En el colegio nos enseñaron un buen montón de cosas, como reglas gramaticales, fórmulas químicas, leyes físicas, narraciones históricas o conceptos filosóficos. La mayoría ya las hemos olvidado. Lo que no hemos olvidado, ni olvidaremos nunca son los números. Hay quien cree que esto es debido a que los números son muy fáciles de aprender, pero nada más lejos de la realidad. Los números son conceptos abstractos que se relacionan entre sí mediante algoritmos de cierta complejidad y que se tarda años en aprender. Los números no los

hemos olvidado porque a lo largo de toda la vida no hay ni un solo día en que no hagamos uso de ellos.

Este libro está dedicado a los números; qué son, para qué sirven y cómo se han construido.

El primer capítulo es un breve apunte histórico sobre la aparición de los sistemas de numeración posicionales y las vicisitudes que tuvieron que sufrir las primeras cifras indo-arábigas para conseguir introducirse en las culturas europeas. Estos sistemas de numeración, y el conjunto de símbolos que los representan, son una herencia cultural que se mantiene vigente gracias a las diferentes estrategias que se han diseñado para que, en los colegios, todo el mundo aprenda a utilizar los números de forma adecuada. A esta tarea es a lo que dedico el segundo capítulo. Los capítulos 3, 4 y 5 muestran cómo se las ingeniaran los griegos, una cultura que carecía de un sistema de numeración, para poder contar y medir mediante métodos geométricos. Fue precisamente en la cultura griega, bajo la influencia de la escuela pitagórica, que los números dejaron de ser meras herramientas de cálculo para acceder a la categoría de conceptos filosóficos y místicos capaces de explicar por sí mismos el mundo. Eran tan perfectos que solo podían habitar en una mente divina. En el capítulo 4 veremos cómo la aparición de los números irracionales (números que se resisten a «entrar en razón», literalmente) provocaron una crisis sin solución que dio al traste con todas estas consideraciones que iban más allá de la aritmética.

El capítulo 5 es un resumen, a modo de sinopsis, de todos los números que hemos ido construyendo a lo largo de la historia.

Los números primos hicieron su aparición en escena incluso antes que los sistemas de numeración. Muy pronto se supo que eran los ladrillos con los que se iba a construir la aritmética y, consecuentemente, se podría decir que toda la matemática. El concepto de número primo es muy simple. Está al alcance de cualquiera que conozca los números y las

cuatro operaciones básicas. Sin embargo, han sido y siguen siendo uno de los mayores retos que tienen planteadas las matemáticas. Les dedico los capítulos 6, 7 y 8.

Quiero hacer especial mención del capítulo 7 en el que están representados algunos de los protagonistas que tuvieron un papel relevante en la aventura de los números primos. La mayoría de la gente, aún teniendo un nivel cultural aceptable, es incapaz de confeccionar una lista con los nombres de una docena de matemáticos célebres. Con este capítulo aspiro, entre otras cosas, a poder cubrir este agujero cultural.

La historia de los números empezó cuando nos vimos en la necesidad de contar, medir y pesar. Seguimos ahí. En el capítulo 9 podemos ver cómo algunas de las nuevas herramientas de la aritmética cambiaron drásticamente nuestra manera de vivir. Un conjunto de técnicas de las que, de alguna u otra forma, había que dejar un testimonio escrito. Y es que los conocimientos de aritmética acumulados a lo largo de la historia han llegado hasta nosotros gracias a que dejaron constancia en la memoria colectiva. El capítulo 10 está dedicado pues a los libros de texto, algunos de los cuales los encontramos entre los papiros más antiguos de la cultura egipcia.

Los números se han utilizado y se utilizan también para saber no solo lo que ha pasado y lo que pasa, sino también lo que podría pasar. Es el territorio del cálculo de probabilidades y la estadística, en el que la mayoría de leyes se rigen por el azar. El capítulo 11 proporciona una visión rápida sobre este y otros temas, como el de la intangibilidad de los conceptos matemáticos, lo que acaba conduciendo inevitablemente a una pregunta recursiva donde las haya: ¿las matemáticas se crean o se descubren?

El capítulo 12, el último, está dedicado al número más grande de todos, el infinito, que junto con el cero y el uno, ha dado lugar a todo tipo de elucubraciones filosóficas, originando un sinfín de controversias. Georg Cantor, uno de

los mayores genios del pensamiento humano, le dio al infinito un tratamiento puramente matemático, convirtiéndolo en un número más.

Un libro de divulgación tiene algo de visita turística. No se puede pedir al viajero que sea un experto escalador o espeleólogo, ni que sea capaz de atravesar ríos infestados de cocodrilos o de caminar interminables horas bajo el sol. Se trata más bien de encontrar senderos por los que se pueda pasear y de localizar miradores desde los cuales se tenga una buena perspectiva del paisaje. Lo que no quita, que entre el grupo de viajeros haya alguien quien, movido por la curiosidad o por la necesidad de mantenerse en forma, decida aventurarse por parajes más inhóspitos. Siempre hay que dejar abierta esa alternativa.

Los conocimientos previos que se requieren para la lectura de este libro parten de un lugar común, ya que no van más allá de aquello que aprendimos en los primeros años del colegio.

Cuando no es así, para los senderistas avezados, hay un sistema de señalizaciones que nos alertan de que se requiere un mayor nivel de conocimientos o de una participación más activa por parte del lector. Para ello he dispuesto de un sistema de señalizaciones, simbolizadas mediante tazas de café (alguien dijo en una ocasión que un matemático era una persona que convertía cafés en teoremas). Una taza requiere conocimientos de enseñanza secundaria. Dos tazas digamos que de bachillerato y tres tazas son recuadros para los muy cafeteros.

Como se suele decir en estas ocasiones, espero que leyendo este libro te lo pases tan bien como me lo he pasado yo al escribirlo.

I

LOS PRIMEROS NÚMEROS

«El ser humano, al principio de su evolución, está todavía en el grado cero de la concepción de los números...».

G. IFRAH

CONTAR

Las relaciones que mantenemos con el medio están basadas en el intercambio. El resultado de este intercambio se traduce en equilibrios, ganancias o pérdidas. Y sea cual sea la forma en que lo hagamos, hemos de poder contabilizar los resultados. Necesitamos saber lo que tenemos como individuos y como colectivo, medir distancias y el tiempo que se tarda en recorrerlas, saber cuántos miembros hay en nuestra tribu, cuántos en nuestro núcleo familiar, cuántas cabezas de ganado tenemos, si disponemos de suficientes alimentos para pasar el invierno o cuántos días faltan para la luna nueva. Los números son información y, junto con las palabras, son esenciales para la construcción del conocimiento y la cultura.

No pasa ni un solo día sin que los números hagan acto de presencia, de alguna u otra forma, en nuestra vida cotidiana. Nada más despertar queremos saber la hora que es,

cuántas horas hemos dormido y de cuántas disponemos antes de salir de casa, porque el tiempo, como todo, lo medimos con números. Ahora más que nunca, y quizás de una forma un tanto obsesiva, no paramos de contar, enumerar y ordenar. Salimos a pasear, a correr o a montar en bicicleta provistos de dispositivos que cuentan los pasos que damos y los kilómetros que recorremos, los vatios invertidos, la frecuencia cardíaca, la saturación de oxígeno, la presión arterial, las calorías consumidas. En las comidas, a los sabores, los colores y los aromas hemos añadido un montón de números que nos informan de proteínas, hidratos de carbono, azúcares, calorías, índices de colesterol, toda una interminable lista de números. Una larga lista a la que hay que añadir los números que representan nuestras ilusiones y nuestros miedos por igual, aquellos de los que pueden llegar a depender nuestras vidas: los números del dinero. Los números son también portadores del azar con el que se construye el destino.

No podemos prescindir de los números. Tanto es así que, de forma consciente o inconsciente, los consideramos como formando parte de la naturaleza, como si siempre hubieran estado ahí para que nosotros pudiéramos utilizarlos. Pero no es cierto. Si no existiera la especie humana, los números tampoco existirían.

Los números nos los hemos inventado.

CONTANDO OVEJITAS

Un pastor está junto a la puerta de su establo intentando llevar un registro de las ovejas que salen. Tiene una bolsa y, al lado, un montón de piedrecitas. Por cada oveja que sale introduce una piedra en la bolsa. Al volver, después de pastorear, realiza el proceso inverso, saca una piedra de la bolsa

por cada oveja que entra en el establo. Si le sobran piedras es que ha perdido ovejas; si le faltan, es que en el rebaño hay alguna que no es suya. Este es un ejemplo que se utiliza con frecuencia para explicar una de las posibles maneras de contabilizar el número de elementos que componen una colección cuando todavía no se dispone de un sistema de numeración.

En latín, a las piedras pequeñas se las llamaba *calculus*; y de ahí procede el verbo calcular. Una alternativa a la bolsa con las piedras es un collar con bolas agujereadas que se puedan desplazar a lo largo de un hilo. El procedimiento es el mismo: una cuenta del collar por cada oveja. De ahí viene la expresión «vamos a pasar cuentas» y otras similares. Las bolas también pueden deslizarse por varillas que estén sujetas a un marco de madera, como las que hay en los billares para contabilizar carambolas o en los ábacos o en las tronas de los bebés.¹

En este tipo de sistemas para contabilizar objetos hay un par de cosas a destacar: la primera es que el método utilizado es por comparación; se comparan entre sí dos colecciones de objetos, se comparan ovejas con piedras o con las cuentas de un collar. Es un método eficaz. Es más, no sería aventurado afirmar que ante la ausencia de números no hay otra forma de hacerlo. La segunda cuestión es la de la utilización de un dispositivo externo, ya sea una bolsa llena de piedras, un collar de cuentas o cualquier otro. A medida que los sistemas de numeración se fueron perfeccionando, algunos de estos dispositivos pasaron de ser utilizados como meros

1 En los aviones, el personal de vuelo contabiliza los pasajeros que hay en el avión mediante un pequeño contador mecánico; aprietan un botón por cada pasajero que ha ocupado su sitio. Sería lo mismo si lo hicieran con piedrecitas o con las cuentas de un collar.

registros de datos a convertirse en herramientas de cálculo, como es el caso de las cuentas en los alambres de un tablero, que acabarían transformándose en el ábaco. Del collar de cuentas que llevaba el pastor colgado del cuello a la calculadora que llevamos todos en el móvil hay un abismo tecnológico de vértigo, pero conceptualmente median solo unos pocos pasos que son, hasta cierto punto, bastante simples.

Una vez hemos contabilizado, por el método que sea, los objetos de una colección, el paso siguiente es poder transmitir esta información, ya que, en muchos casos, no solo interesa al individuo, sino que puede ser necesario poderla compartir entre los miembros de su colectivo. Y esto es algo que también se hace por comparación. Lo más cómodo y lo más inmediato es utilizar los dedos de las manos. Por ejemplo, los damara, una tribu bantú del África subecuatorial, lo hacen cogiendo con una mano los dedos de la otra. Es fácil, rápido y preciso, pero no les permite contar más allá de cinco. Es mejor utilizar los dedos de las dos manos. No hace falta cogerlos, basta con enseñarlos. De esta forma se puede llegar hasta diez, que no es mucho. Para ampliar el rango se pueden utilizar también las falanges de los dedos. Hay catorce en cada mano. Este ha sido un método ampliamente utilizado entre los pueblos asiáticos.² De este modo se puede contar, entre las dos manos, hasta 28. Y todavía pueden añadirse, por qué no, los dedos de los pies, aunque esto tiene el pequeño inconveniente de que hay que ir descalzo (este sistema excluye a los esquimales). Con los dedos de las manos y de los pies se puede contar hasta veinte, pero no más. Aunque siempre se pueden ir añadiendo más partes del cuerpo. Los papúes de Nueva Guinea, por ejemplo,

2 En China era frecuente que las mujeres llevaran un control de su ciclo menstrual atándose un pequeño lazo en la falange correspondiente.

lo hacían así: empezaban por el dedo meñique de la mano derecha para indicar una unidad; a partir de aquí recorrían todos los dedos, luego la muñeca, el codo, el hombro, la oreja, nariz y boca, para pasar entonces a la oreja izquierda y continuar el recorrido hasta acabar en el dedo meñique de la mano izquierda, que correspondía al número 22.

El caso es que, se haga como se haga, siempre habrá una cantidad que supere el número de objetos del que nos valemos para establecer la comparación. Tampoco se trata de ir arrastrando una bolsa con cientos de piedras o de acabar enseñando nuestras partes pudendas. La mejor manera de resolver el problema, quizás la única, es «agrupar»; lo que se traduce en que, cuando se han acabado los elementos que utilizo, ya sean partes del cuerpo, piedras o cuentas, lo que se hace es dejar algún tipo de marca o señal y volver a empezar. Por ejemplo, si se utilizan las falanges de los dedos, se puede usar una de las manos, la derecha, para ir contando y, cuando se llega a doce, momento en que se acaban las falanges de una de las manos, levantar un dedo de la otra mano. De esta forma, si quien tengo delante me señala con el pulgar de la mano derecha la sexta falange y en la mano izquierda tiene levantados dos dedos, sé que me está diciendo que tiene treinta de lo que sea.

La agrupación de cantidades es el paso previo a lo que más adelante serán las bases de los sistemas de numeración.

No podemos percibir como número un conjunto que tenga más de cuatro objetos. A partir de esta cantidad es necesario agruparlos y sumarlos. Si se dejan, por ejemplo, siete lápices encima de una mesa, sabemos que son 7 porque hemos hecho dos grupos, o bien de 4 y 3, o bien de 5 y 2 y los hemos sumado. Lo hacemos de forma muy rápida, casi inconsciente, pero lo hacemos. Es fácil de comprobar.

BASES

El concepto de base es simple: es el número a partir del cual se vuelve a iniciar una cuenta. Si en el casillero de bolitas por cada 7 de la fila de arriba muevo una de la fila de abajo, es que estoy trabajando en base siete. Esto quiere decir que, cuando llego a siete, vuelvo a iniciar la cuenta. Elegir una base de numeración es algo arbitrario. La que se ha acabado imponiendo por mayoría es la base diez, dando lugar a lo que se conoce como «sistema decimal». En este sistema, cuando llegamos a diez volvemos a empezar el ciclo. Parece claro que el motivo por el que hemos elegido esta base es porque tenemos un total de diez dedos en las manos. Si en vez de homínidos fuéramos patos, nuestro sistema de numeración sería seguramente en base seis.

El sistema decimal ha tenido y sigue teniendo detractores. Y es que la base diez no es la mejor elección, ya que solo tiene como divisores 2 y 5. Mientras que, por ejemplo, un sistema en base doce (el mejor candidato) tiene como divisores 2, 3, 4 y 6, lo que supone una clara ventaja a la hora de hacer repartos.

Todavía nos quedan vestigios de las bases que fueron utilizadas por diferentes culturas a lo largo de la historia. Los huevos los seguimos contando por docenas. Hay incluso, aunque ahora está en desuso, la «gruesa», que es una docena de docenas. O la base veinte de la que el idioma francés conserva vocablos como *quatre-vingt* (cuatro veces veinte) para decir ochenta. O el misterioso sistema babilónico de base sesenta (nadie sabe a ciencia cierta por qué eligieron esta base), que seguimos utilizando para contabilizar el tiempo: sesenta segundos son un minuto y sesenta minutos, una hora.

La comunicación gestual de cantidades, de las que hemos visto algunos ejemplos anteriormente plantea el problema de

que es presencial. No se puede designar a alguien como depositario de esta información y dejarlo a las puertas del departamento señalando una parte de su cuerpo o custodiando una bolsa con piedrecitas. La gestualidad es una manera poco eficaz de dejar un testimonio útil de los cálculos que se han hecho. Parece inevitable, pues, que tarde o temprano aparezca un sistema de símbolos que permita escribir signos que representen cantidades, de la misma forma que escribimos palabras para designar objetos. En algunas culturas la aparición de signos escritos para representar números es incluso anterior a la del lenguaje escrito.³

Pero, para conseguir esto, es necesario alcanzar un cierto nivel de abstracción, al igual que sucede con el lenguaje: cuando decimos «árbol» no nos estamos refiriendo a un árbol en concreto, sino que estamos haciendo una abstracción del árbol como concepto. La capacidad de abstracción en el ser humano es consustancial a su naturaleza, como lo es la memoria o la percepción sensorial.

El número, como tal, es pues una abstracción.⁴ Una niña aprende que «cinco» no solo sirve para decir los años que tiene su hermano mayor o los caramelos que le quedan en el bolsillo: «cinco» también sirve para designar cualquier cosa que tenga cinco unidades. Esto es algo que los niños aprenden casi sin darse cuenta, ya que es la única manera de aprender algo así.

3 En Japón, la utilización del lenguaje escrito fue muy tardía. Permaneció como lengua ágrafa hasta el siglo VI de nuestra era, que fue cuando importaron de China la escritura y los signos de los números. Actualmente, estos signos numéricos han quedado arrinconados por los arábigos que utilizamos todos, aunque los primitivos signos de numeración japoneses todavía pueden verse en los precios de algunos restaurantes tradicionales.

4 En matemáticas hay cuatro niveles de abstracción. Este es el primero.

La introducción de los números en nuestros procesos mentales se hace a paso de tortuga. Una mínima madurez numérica (saber contar y ordenar los números de menor a mayor) no se alcanza hasta los cinco años.

Para poder escribir un número en la pizarra es necesario conocer las cifras, los guarismos que las representan, de la misma forma que para aprender a leer es necesario conocer las letras del alfabeto. En este sentido, se podría decir que las cifras son el alfabeto de la aritmética. Al poco de haberlo aprendido, a los niños les queda muy claro que números y letras son alfabetos diferentes y que se utilizan para cosas diferentes; pero no siempre ha sido así.

CIFRAS

A lo largo de la historia, las grandes civilizaciones han creado diferentes sistemas de numeración. A algunas les ha ido mejor que a otras. Las culturas «importantes» diseñaron sus propios signos para representar los números. China desarrolló un sistema de numeración decimal con la introducción del cero hacia el 1500 a. C., al mismo tiempo que lo hacían los mayas, sin influencia de ninguna otra cultura, creando un sistema de numeración en base 20 que también incluiría el cero. Luego insistiremos en la importancia que tuvo la inclusión del cero en estos sistemas.

Los matemáticos griegos utilizaron para sus cálculos las letras del alfabeto. Y los romanos heredaron, aunque con algunas modificaciones, el mismo sistema de grafía numérica, un sistema que prevalecería en la cultura europea hasta comienzos del Renacimiento. La de las cifras es una historia de muy larga andadura, llena de dificultades, y un tanto rocambolesca, especialmente en la cultura europea, en la que, por encima de intereses puramente científicos o prácticos,

prevalcieron prejuicios que, en su mayoría, fueron de carácter religioso.⁵

De la misma forma en cómo nos referimos a la ruta de la seda, se podría hablar de la ruta que siguieron los números desde su origen hasta su llegada al continente europeo. Fue en el norte de la India en donde tuvo lugar el nacimiento, hacia el siglo v a. C., del sistema de numeración que utilizamos actualmente. Este sistema viajó hasta Babilonia en donde, hacia el 1500 a. C., se instauró un sistema de numeración posicional que incluía el cero. Más adelante los árabes adoptaron el sistema indio y crearon, alrededor del siglo ix, sus primeros tratados de aritmética. Un siglo después, las cifras árabes se introdujeron en Europa, no sin grandes dificultades, ya que la Iglesia católica condenó el uso de «esos números infieles» que pretendían sustituir a los números heredados de la cultura romana. De manera que los guarismos que actualmente utilizamos provienen de la cultura india, la primera en crear un sistema de cifras para los números del 1 al 9.

Se podría pensar que diseñar un sistema de símbolos para representar números no tiene tanta importancia, pero tiene mucha más de la que parece, ya que se trata de un conjunto de guarismos que, de forma intencionada, está dissociado de cualquier intuición gráfica, erigiéndose así como símbolos puramente abstractos con un significado único.

5 Para quien pueda estar interesado en la historia de los sistemas de numeración, hay una obra de referencia que es *Historia universal de las cifras*, de Georges Ifrah (Espasa, 1997).

EL SISTEMA POSICIONAL

El sistema de numeración romano, que utilizaba algunas letras de su alfabeto para designar números, lo hacía de forma que el valor de un número era el mismo ocupara la posición que ocupara. El número X vale diez en XII (12), en CXXV (125) o en MCCX (1.210). Era un sistema de numeración NO POSICIONAL. Para cerciorarse de las deficiencias de las que padece un sistema de esta naturaleza, basta con intentar hacer una multiplicación de un par de números grandes, de cuatro o cinco cifras, sin perecer en el intento.

En un sistema posicional como el nuestro, damos el valor «cincuenta» al 5 que se encuentra en el número 3.852, el valor «quinientos» si se encuentra en el número 2.582 o «cinco mil» si se trata de 5.638. Esta facilidad que tenemos para saber el valor de un número según la posición que ocupa es el resultado de uno de los inventos más importantes que se han dado en la historia de la humanidad: el sistema de numeración posicional.

Sabías que...

- Los romanos les ponían nombres propios a sus hijos, pero solo hasta el cuarto; a partir de este, los enumeraban: *quintus* (quinto), *sextus* (sexto), *octavius* (octavo), *decimus* (décimo). En el caso de una familia numerosa, no era raro que a un hijo le tocara llamarse *numerous* (numeroso).
- En el reino animal se encuentran algunos ejemplos de especies que parece que pueden contar con precisión. Las avispas solitarias siempre aparecen como un ejemplo

paradigmático de este fenómeno, ya que la cantidad de orugas vivas que dejan como alimento en las celdillas en las que han puesto los huevos son siempre un número exacto: 5, 12 o 24. Concluir de esto que las avispas solitarias saben contar siempre me ha parecido algo exagerado.

- En la Antigüedad no se contaba más allá de unos cuantos miles. En realidad, tampoco había tantas cosas para contar. Cuando alguien quería exagerar, decía que había «más que las estrellas». El número «un millón» no aparece hasta la alta Edad Media y es una palabra latina que significa «gran millar» o «mil veces mil». Está claro que, para entonces, los astrónomos habían empezado a contar las estrellas y que el volumen de negocio de los mercaderes iba en aumento. Los billones y los trillones tardarían todavía mucho en llegar.

UNO Y CERO

«Si se quisiera esquematizar la historia de las numeraciones, se diría que es todo el camino que ha separado el Uno del Cero».

G. IFRAH

Durante siglos, el «uno» no fue considerado un número. En el ámbito aritmético su único rol era el de generar el resto de números, ya que, como todo el mundo sabe, cualquier número se puede obtener a base de sumar «unos». Euclides, en el libro X de los *Elementos*, afirma que: «Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno. Número es una pluralidad compuesta de unidades».