

ANEXO

LA INFORMACIÓN COMO MAGNITUD FÍSICA

Este es un breve complemento al libro *El Universo en un bit* que puede ser de utilidad para aquellos que deseen asomarse a algunos de los fundamentos físicos y matemáticos de la información.

La información es una sustancia fundamental, es una magnitud física. La unidad de información es el bit. Un bit es la menor cantidad posible de información.

Un bit es la simple elección entre dos posibilidades sean cuales sean: encendido/apagado, 1/0, si/no, cara o cruz, etc.

La clave de la información es la diferenciación entre una cosa y otra. Si no hay diferenciación entre dos estados no puede haber información. Solo se requiere que esas dos posibilidades se excluyan mutuamente

La información es, por lo tanto, la percepción de una diferencia. Esa diferencia requiere una materia o energía que le sirva de soporte: un disco duro, una página de un libro o la onda sonora de un violín.

El universo es digital: la unidad de información digital es el bit. Los bits están en todas partes: el giro de un electrón o la polarización de un fotón registra un bit. Las interacciones

entre esos bits dan lugar a una dinámica microscópica que es, en esencia, una computación.

Referencia: AA.VV., *Quantum Aspects of Life*, Imperial College Press, 2008.

ENTROPÍA E INFORMACIÓN

Entropía e información son las dos sustancias fundamentales de todo lo que existe, del universo y de la vida. No dependen de ninguna otra magnitud, solo existen por sí mismas. La entropía y la información siempre se relacionan de una manera inversa. Un aumento de entropía implica una disminución de información y viceversa.

El demonio de Maxwell

El primero que relacionó la entropía con la información fue el gran físico escocés C. Maxwell mediante su experimento mental denominado *El diablo de Maxwell*, en 1867. Hay un gas distribuido en dos recipientes separados por una trampilla. Un diablillo se encarga de identificar las moléculas rápidas (calientes) y las lentas (frías) y encerrarlas cada una en un compartimento: las frías a la derecha y las calientes a la izquierda.

Era la primera vez que se asociaba el concepto de información con el de entropía, aunque la palabra información no se usase. Pero el diablillo sabía (es decir, tenía información) de cual partícula era fría y cual caliente. Mediante ese conocimiento reducía la entropía del sistema al agrupar cada tipo de partícula en un compartimento. Pero aparentemente lo hacía violando la segunda ley de la termodinámica. Maxwell no sabía cuál podría ser la fuente de energía que le permitía al demonio hacer el trabajo de clasificación de las moléculas frías y caliente. Este asunto ocupó a un montón de físicos durante muchos años.

Es interesante el resaltar la genialidad de Maxwell que le permitió que, además de intuir la relación entre entropía e información, iniciara los estudios de la naturaleza estadística de la entropía. En una carta de Maxwell al físico y matemático Peter G. Tait le dice: «En cuanto a los demonios... ¿Cuál era su fin principal? La de demostrar que la 2ª Ley de la Termodinámica sólo tiene una certeza estadística».

Referencia: Devereux, M., *A Modified Szilard's Engine: Measurement, Information, and Maxwell's Demon*, *Entropy* 6: 102 – 115, 2004.

Macroestados y microestados

Ludwig Boltzmann en Alemania y Josiah Gibbs en Estados Unidos abordaron el asunto de la entropía desde la mecánica estadística, como había señalado Maxwell.

Los avances en la física y la química de los átomos y moléculas mostraron que toda la materia sólida, líquida o gaseosa estaba formada de una infinidad de elementos minúsculos: moléculas, átomos y partículas subatómicas.

Las propiedades macroscópicas de cualquier sistema dependían de la suma de las propiedades de esos minúsculos componentes. Y eso solo se podía estudiar recurriendo a la estadística.

Se definió un MACROESTADO como el conjunto de propiedades macroscópicas de un sistema (temperatura, volumen, presión, etc.). Por ejemplo, un globo inflado con aire. Dentro del globo hay una mezcla de moléculas de diferentes gases cada una se mueve aleatoriamente con sus características de energía cinética, fuerza, temperatura, choque de las moléculas entre sí y contra las paredes del globo, etc.

Un macroestado como el de un globo inflado este compuesto de millones de MICROESTADOS, que reflejan el comportamiento promedio de las moléculas de la mezcla

de gases que llenan el globo. Por ejemplo, la temperatura dentro del globo es el promedio de la energía cinética de todas las moléculas que lo llenan; la tensión de las paredes del globo refleja el promedio del choque de las moléculas entre sí y contra las paredes elásticas del globo.

Cada macroestado sometido a una situación de equilibrio admite numerosos posibles microestados o configuraciones diferentes.

La fórmula de Boltzmann

Boltzmann consideró que la entropía se correspondía con los niveles microscópicos de energía disponibles en los microestados. Era el resultado de las interacciones de millones de millones de partículas, átomos o moléculas. Por lo tanto, la entropía dependía del número de microestados que admitiera un macroestado.

En 1868 publicó su famosa fórmula:

$$S = K \log \Omega$$

S es la entropía (julios/temperatura).

K es la constante de Boltzmann ($k = 1.3806504 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$).

Ω es el número de configuraciones del sistema o forma en la que se pueden organizar (microestados) los átomos y moléculas de un sistema (macroestado).

Cada macroestado admite varios posibles microestados o configuraciones. El macroestado que admita el mayor número de microestados es el que tiene más entropía. Por ejemplo, tenemos dos macroestados: una copa de cristal intacta y una copa de cristal hecha añicos. El macroestado *copa intacta* solo admite un microestado, el de copa capaz de llenarse de vino, tiene poca entropía (poca aleatoriedad,

mucho orden). El macroestado de *copa rota* admite muchos microestados, tantos como formas de esparcir los pedazos de cristal sobre la mesa, tiene mucha entropía (mucha aleatoriedad, mucho desorden).

Fórmula de Boltzmann y Gibbs

Boltzmann y Gibbs comprendieron que los sistemas físicos reales podían alcanzar millones de microestados. Unos microestados de un sistema pueden tener más probabilidad que otros, por eso recurrieron a utilizar en sus cálculos el promedio de microestados posibles.

Veamos unos breves conceptos de estadística. Probabilidad es una medida de la certidumbre de que ocurra un evento. Su valor va de 0 a 1, donde un evento imposible corresponde a cero probabilidades y un evento seguro corresponde a uno.

Supongamos una máquina que lanza billetes de 20, 10 y 5 euros con una probabilidad (p) tal que de cada seis billetes que lanza dos son de 20€, uno es de 10€ y tres de 5€.

El promedio de los euros que lanza la máquina resulta de aplicar la fórmula:

$$X = \sum_i p x$$

Donde p es la probabilidad para cada valor x , es decir, $X = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N$.

Para el ejemplo de la máquina de euros, el promedio de dinero lanzado sería: $X = 2/6 \cdot 20 + 1/6 \cdot 10 + 3/6 \cdot 5 = 5,2€$. En consecuencia, para Boltzmann y Gibbs la entropía es una medida del promedio de posibles estados microscópicos o microestados de un sistema en equilibrio termodinámico, consistente con sus propiedades termodinámicas macroscópicas (P, V, T) o macroestado. Y elaboraron en 1870 una nueva fórmula de la entropía, una de las fórmulas más importantes de la física:

$$S = -k_B \sum p_i \ln p_i$$

S es la entropía, que se mide en julios/kelvin.

k_B es la constante de Boltzmann.

p_i es la probabilidad del microestado i .

El signo menos se usa por convención para que el resultado salga positivo. P_i es siempre un número entre 0 y 1 y el logaritmo siempre es negativo. i siempre es un valor positivo entre 0 e infinito.

Se usan logaritmos, además, porque el número de estados crece exponencialmente y la mejor manera de manejar potencias son los logaritmos.

Entropía e información según Szilard

Leo Szilard publicó su modelo más de 60 años después de que Maxwell presentara su ser inteligente o diablo. Szilard simplificó el problema de dos maneras: redujo el gas macroscópico de Maxwell a una sola molécula que ocupaba un pistón que podía moverse. Permitted que el demonio clasificara la molécula por su ubicación más que por su velocidad.

Con este artilugio mental pudo calcular el valor medio de entropía que se producía por cada dos alternativas de situación de la molécula. Su fórmula era una versión abreviada de la fórmula de Boltzmann.

$$S = k \log 2$$

Utilizó el logaritmo de 2 como reflejo de la decisión binaria (los dos microestados) que implicaba el diseño de su experimento.

Szilard conectó el acto de medir con la adquisición de información, que se almacenaba en la memoria del

observador. Esta información se utilizaba luego para decidir cómo extraer trabajo útil. Para evitar una violación de la segunda ley, Szilárd postuló que la acción del diablo produce un incremento de entropía. Así, la intervención de un ser inteligente genera exactamente la cantidad de entropía que se requiere para estar de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica.

Fue el primero en relacionar matemáticamente entropía e información.

Referencia: La publicación de Szilard, originalmente en alemán, se reeditó en inglés y es de libre acceso en internet: Szilard, L., *On the Decrease of Entropy in a Thermodynamic Systems by the Intervention of Inteligente Being*, *Behavioral Science*, vol. 9, págs. 301 – 310, 1964.

La Teoría de la Información de Shannon

Al ingeniero y matemático Claude E. Shannon le encargó la empresa Bell de comunicaciones, para la que trabajaba, que intentase solucionar los graves problemas de comunicación que sufrían.

Se puso a la tarea y dio origen a su Teoría de la Comunicación (1948) que ha revolucionado, hasta la fecha, las comunicaciones y la informática.

Referencia: Shannon, C.E., *A Mathematical Theory of Communication*, *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, págs. 379–423, 623–656, 1948.

Shannon se basó fundamentalmente en los estudios y fórmulas de Boltzmann y Gibbs de la entropía en los gases. Comparó los mensajes con los recipientes llenos de gases. Un mensaje se comportaba como un macroestado, en el que existían numerosos microestados a causa de las variaciones en las letras, palabras signos, etc. que componían normalmente el mensaje.

Propuso que la información contenida en un mensaje es proporcional a la probabilidad de los elementos (o bits) que se requieren para que el mensaje sea recibido correctamente.

$$I_{(x_i)} = -\log_2 p_{(x_i)}$$

La Información (I) es el logaritmo de la probabilidad $p_{(x_i)}$ es el valor promedio de las posibilidades de un resultado concreto. Al ser dos opciones se usa base 2.

Ejemplos:

Moneda normal con cara y cruz

Probabilidad de que salga cara: $p_{(ca)} = 1/2$; $-\log_2 1/2 = 1$

Probabilidad de que salga cruz: $p_{(cz)} = 1/2$; $-\log_2 1/2 = 1$

Valor promedio $\sum_i p_i x_i$

$$I = \sum_i p_i \log_2 p_i = -1/2 \log_2 1/2 + 1/2 \log_2 1/2 = 1$$

Moneda falsa con dos caras

Probabilidad de que salga cara: $p_{(ca)} = 1$; $-\log_2 1 = 0$

Según Shannon, si se sabe con certeza el contenido de un mensaje su cantidad de información es cero.

Probabilidad de que salga cruz $p_{(cz)} = 0$; $-\log_2 0 = \infty$

Según Shannon el mensaje que menos probabilidades tiene de conocerse su contenido su cantidad de información es máxima

La entropía (S) mide la cantidad promedio (esperada) de información de un proceso aleatorio.

$$S = \sum p_i I_i = - \sum p_i \log_2 p_i$$

En el número de la Lotería primitiva que se obtiene al extraer de una caja seis bolas numeradas del 1 al 6. La entropía es mínima y la información máxima porque solo hay un resultado posible; el premio máximo.

En el número que se obtendría al extraer seis bolas de una caja numeradas todas las bolas con el mismo número. La entropía es máxima y la información es mínima; todos los resultados o configuraciones del sistema tienen la misma probabilidad.

La idea básica de la teoría de la información es que el «valor informativo» de un mensaje comunicado depende del grado en que el contenido del mensaje sea sorprendente. Si un evento es muy probable, no hay ninguna sorpresa (y generalmente no es interesante); ese evento ocurre como se esperaba; por tanto, la transmisión de un mensaje de este tipo conlleva muy poca información nueva.

Sin embargo, si es poco probable que ocurra un evento, es mucho más informativo saber si el evento sucedió o sucederá. Por ejemplo, el conocimiento de que un número en particular *no* será el número ganador de una lotería proporciona muy poca información, porque es casi seguro que cualquier número elegido en particular no ganará. Sin embargo, el conocimiento de que un número particular *será* ganador de la lotería tiene un alto valor, ya que se comunica el resultado de un evento de muy baja probabilidad.

La entropía informativa

¿Cómo se puede cuantificar la información contenida en un mensaje? Ya vimos que Shannon consideró un mensaje como un macroestado. Y en consecuencia adoptó una fórmula similar a la usada por Boltzmann y Gibbs para los gases.

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

H es la cantidad de información promedio.

X es la distribución de símbolos en un mensaje.

$P_{(i)}$ es la probabilidad de encontrar un símbolo concreto (x_i) en un mensaje de una cierta extensión (n).

La entropía de un mensaje es el valor promedio de la cantidad de información de los diversos microestados del mensaje que representa una medida de la incertidumbre media de una variable aleatoria del mensaje y, por tanto, de la cantidad de información que proporciona.

Pero la aplicación de esta fórmula abarca desde todo lo que tiene que ver con la comunicación oral, visual y escrita, a la informática (por ejemplo, la compresión de imágenes) y otros muchos campos de la ciencia, incluidas la biología y la medicina, e incluso de las letras, como sucede con la semántica.

Por ejemplo, la fórmula de Shannon se utiliza para determinar la biodiversidad de un suelo o de un ecosistema.

$$H' = - \sum_{i=1}^S p_i \log_2 p_i$$

Donde:

- S: Número de especies
- p_i : Proporción de individuos de cada especie respecto al total
- n_i : Número de individuos de la especie i
- N: Número de individuos de todas las especies
- H': Resultado de la ecuación que normalmente varía entre 0,5 y 5

Menor a 2 es bajo y superior a 3 es alto en relación con la biodiversidad

Información y energía

R. Landauer trabajaba para IBM y su interés se centraba en investigar la relación entre información y energía; en especial la cantidad de energía relacionada con la creación o el borrado de un bit de información. En 1961 publicó sus resultados.

El principio de Landauer muestra que se requiere una cantidad mínima de energía para crear un bit de información, conocido como el *límite de Landauer*. También se libera energía en forma de calor cuando ese bit se borra.

El experimento mental que utilizó era el de un gas compuesto por una sola molécula que se expande a temperatura constante hasta duplicar su volumen. Utilizó la fórmula de Boltzmann de la entropía: $S = k_b \ln \Omega$.

Un dispositivo de memoria es una matriz finita de N elementos binarios (Macroestado) que pueden contener información sin disipación. Hay 2^N microestados posibles. La entropía inicial de información es, por tanto:

$$S_i = N \cdot K_b \cdot \ln(2)$$

Para señalar su dependencia de la temperatura ambiente introdujo esta variable. Así según Landauer la cantidad la energía necesaria para crear 1 bit o emitida al entorno al borrar 1 bits viene definida por la expresión:

$$E = K_b T \ln 2$$

Como k_b tiene un valor de 1.38×10^{-23} J/K), el $\ln 2$ es aproximadamente 0.69315 y si se considera el valor de T igual a la temperatura de habitación 20°C (293.15 K), podemos calcular un valor de límite de Landauer de 0.0175 eV

(electrón voltios) que equivalen a 2.805 zJ (z es zepto que equivale a 10^{-21}) por bit borrado.

Referencia: Landauer, R., *Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process*, IBM J. Res. Del., vol. 5, págs. 183 – 191, 1961 [reeditado en el año 2000].

Información y materia

H.J. Bremermann estableció por primera vez la relación entre materia e información. La información requiere la percepción de una diferencia entre dos estados. Y la diferencia requiere un formato material o energético para expresarse (página de un libro, superficie de mineral magnético de un disco duro, ondas sonoras de un violín).

H.J. Bremermann definió en 1963 el límite de la máxima velocidad de computación que se puede lograr en un sistema material. Para sus cálculos estableció la equivalencia de masa y energía de Einstein y la ecuación de Planck.

La ecuación de Einstein indica que la energía es proporcional a la materia

$$E = mc^2$$

La ecuación de Planck indica que la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia.

$$E = hf$$

Combinó ambas ecuaciones y consideró a un fotón equivalente a un bit.

$$mc^2 = hf. \quad f = m \cdot c^2/h ;$$

De lo que resulta que $c^2/h = 1,36 \times 10^{50}$ bits/segundo/kilogramo

El límite de Bremermann es la máxima velocidad computacional de un sistema material. Es el límite del procesamiento de información por la materia. Se sigue utilizando mucho en informática.

Referencia: Bremermann, H.J., *Quantum Noise and Information. 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. of California Press, 1965.

Principio de equivalencia de Vopson

El físico M.M. Vopson sustituyó la energía en la ecuación de Einstein $E = m c^2$ por el valor de la energía en la fórmula de Landauer $E = K_b T \ln 2$. De lo que resulta la igualdad $m c^2 = K_b T \ln 2$. Al despejar la masa obtenemos la ecuación de la masa de un bit:

$$m_{\text{bit}} = K_b T \ln 2 / c^2$$

Una vez que se crea un bit de información, por ejemplo, en un disco duro, esta permanece indefinidamente sin disipación de energía. Según Landauer el proceso de crear información requiere la aplicación externa de un trabajo ($W = k_b T \ln 2$) que permite modificar el sustrato físico que va a crear y almacenar la información. El proceso de borrado de un bit de información genera calor. $Q = k_b T \ln 2$ que se libera al entorno como entropía.

Para Vopson, la explicación es que cuando se crea un bit se adquiere una masa finita: m_{bit} . Es la masa equivalente al exceso de energía creada en el proceso de reducción de la entropía de información, cuando un bit se borra. El contenido de información se almacena en una masa física lo que permite mantener la información indefinidamente, sin disipación de energía.

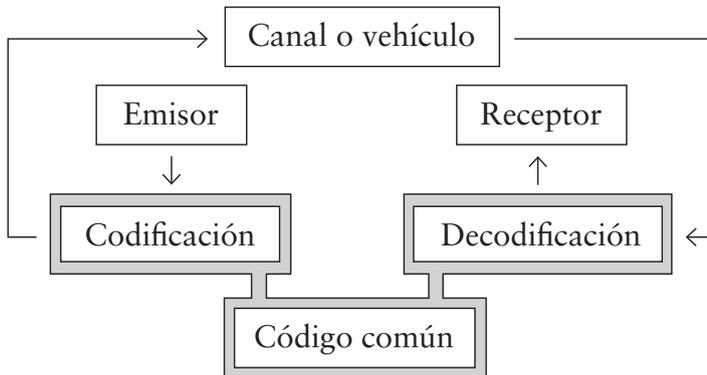
En consecuencia, la masa de un bit de información a temperatura ambiente (300k) es de $3,19 \times 10^{-38}$ kg. Un dispositivo de almacenamiento de información puede aumentar su masa en una pequeña cantidad cuando está lleno de información digital. Para un disco duro de 1 Tb el

cambio estimado de masa al llenarlo de información sería $2,5 \times 10^{-25}$ Kg.

La masa de la información, y la información misma, depende de la temperatura a la que la información bit existe. En el cero absoluto, $m_{\text{bit}} = 0$; no puede existir información. Esto no se aplica a la información contenida en ondas, en fotones, que se rige por la mecánica cuántica. Ni a la información contenida en las biomoléculas que se rigen por las leyes biológicas.

Referencia: Vopson, M.M., *The Mass-energy-information Equivalence Principle*, AIP Advances 9, 2019.

LA CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN



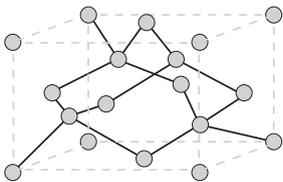
De acuerdo con Shannon y Weaver, todo sistema de comunicación de información consta de varias partes. Un *Emisor* o *Fuente*, la cual genera un mensaje a ser recibido en el destinatario. Un *transmisor* o *codificador*, que transforma el mensaje generado en la fuente en una señal capaz de ser

transmitida. En los casos en los que la información es codificada, el proceso de codificación también es implementado por el transmisor. Un *canal* de salida es cualquier medio que sirva para que la señal se transmita desde el transmisor al receptor. Este puede ser, por ejemplo, un cable, una fibra óptica o una señal inalámbrica. Un *receptor*, que reconstruye el mensaje a partir de la señal. El canal de entrada permite que penetre la señal al sistema. El transmisor descodifica la señal y proporciona la información al receptor o sistema destinatario, que es quien recibe el mensaje y lo ejecuta.

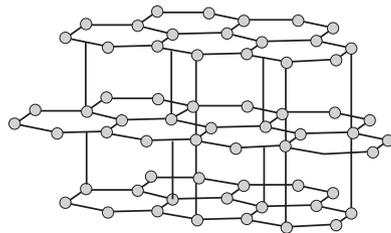
Referencia: Shannon, C. y Weaver, W., *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana and Chicago: University of Illinois Press, 1949.

En la naturaleza, información contenida en los bits de átomos, partículas u ondas se codifica, fundamentalmente en forma de moléculas.

Diamante

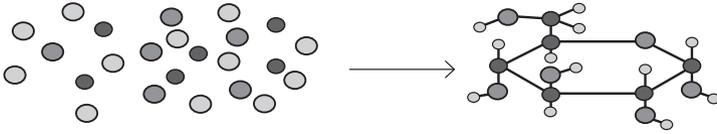


Grafito



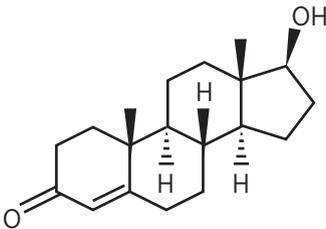
Referencia: Vo, T. y Glotzer, S. C., *A theory of entropic bonding*, PNAS, 2022

Grafito y diamante están formadas exclusivamente por átomos de carbono. Si los enlaces de los átomos de carbono adoptan un estructura tridimensional, codifican la información diamante. Si se disponen en láminas planas paralelas, codifican el grafito.

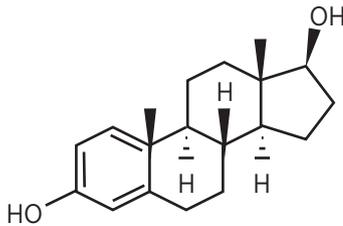


Una mezcla de átomos de carbono, oxígeno, hidrógeno es un macroestado de gran aleatoriedad, elevada entropía y que proporciona poca información. Cuando esos átomos se enlazan para formar una molécula de glucosa el resultado es un macroestado de poca aleatoriedad, baja entropía y que proporciona mucha información, que puede ser utilizada por las células de cualquier organismo vivo.

Testosterona



Estradiol



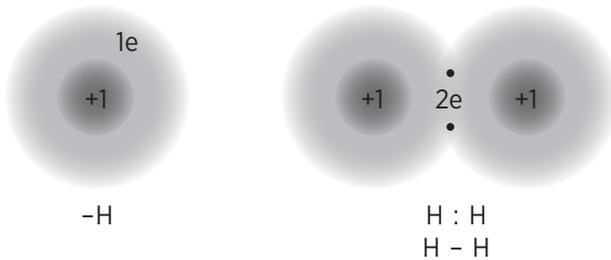
Solo se diferencian en un carbono y cuatro hidrógenos.

La información no depende de los átomos en sí, sino de la forma en que se enlazan para formar estructuras moleculares tridimensionales. Se observa bien en la molécula de Testosterona ($C_{19}H_{28}O_2$), la hormona responsable de las características fisiológicas de los machos, y su escasa diferencia en la composición atómica con la molécula de Estradiol ($C_{18}H_{24}O_2$), la hormona responsable de las características fisiológicas de las hembras.

¿QUÉ IMPULSA A LOS ÁTOMOS A FORMAR MOLÉCULAS?

Los átomos no existen como tales en las condiciones que existen en la Tierra. Un átomo aislado tiene su nivel alto de energía, es inestable, y su tendencia natural es a unirse a otros átomos para formar moléculas, situación que permite un nivel más bajo de energía y más estabilidad.

Cualquier sistema natural tiende espontáneamente a adoptar el estado de más baja energía.



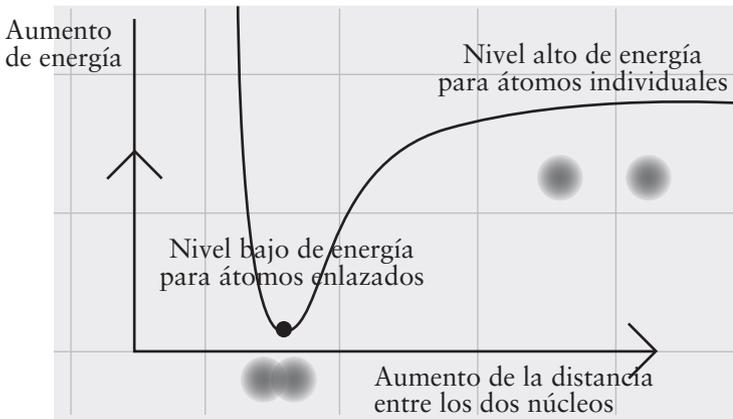
La energía de dos átomos de hidrógeno unidos es menor que la de un sistema de átomos separados. Por eso en las condiciones que existen en nuestro planeta los átomos tienden a formar moléculas. Y esta es la base de la codificación molecular de la información.

Un átomo de hidrógeno solitario estará en su más alto estado energético. Si introducimos un segundo átomo en el sistema tienden a acercarse para enlazarse y reducir su estado energético. Los átomos son energéticamente estables cuando sus electrones son compartidos y los protones no se repelen demasiado entre sí.

En este proceso intervienen numerosas fuerzas: energía cinética de cada átomo, energía potencial entre los protones, energía potencial entre los dos electrones, energía potencial entre cada protón y cada electrón. La suma de todas ellas nos da la energía cinética y potencial de todo el sistema. En

física cuántica se le llama operador Hamiltoniano (H) como se muestra en la Ecuación de Schrödinger. Se requieren matemáticas muy complejas.

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$$



Referencia: Ash, Arvin, *Why do atoms form molecules? The quantum physics of chemical bonds explained*, disponible en YouTube.