





# **MATEMATIČKA KARTOGRAFIJA**

Sa primerima u R-u i Pajtonu

Milan Kilibarda

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
Akademska misao  
Beograd, 2023.

Milan Kilibarda

**MATEMATIČKA KARTOGRAFIJA  
SA PRIMERIMA U R-U I PAJTONU**

Recenzenti

dr Dragan Blagojević, dipl. inž. geod.,

redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Vesna Poslončec-Petrić, dipl. inž. geod.,

vanredni profesor, Univerzitet u Zagrebu, Geodetski fakultet

Lektor

Mira Čanović

Izdavači

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

Akademski misao, Beograd

Štampa

Akademski misao, Beograd

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7518-237-5

## Sadržaj

Predgovor.....	11
1. Uvod u kartografiju.....	14
1.1 Definicije karte.....	14
1.1.1 Klasifikacija karata .....	17
1.2 Definicija kartografije.....	18
1.3 Kartografski izvori.....	21
1.4 Vektorski podaci .....	24
1.4.1 Izvori dostupnih vektorskih podataka.....	31
1.5 Rasterski podaci.....	31
1.5.1 Slobodno dostupni rasterski podaci .....	34
1.6 Podela kartografije .....	36
1.7 Zadaci matematičke kartografije.....	39
1.7.1 Aproksimacija planete Zemlje .....	40
1.7.2 Prvi ili direktni zadatak matematičke kartografije.....	42
1.7.3 Drugi ili inverzni zadatak matematičke kartografije .....	42
1.7.4 Koordinatne transformacije iz jednog koordinatnog sistema u drugi.....	43
1.8 Istorija matematičke kartografije .....	44
2. Referentne površi i koordinatni referentni sistemi.....	47
2.1 Koordinate.....	47
2.2 Koordinate u ravni .....	47
2.3 Koordinate na sferi.....	53
2.3.1 Geografske krivolinijske koordinate $\varphi$ i $\lambda$ na sferi .....	54
2.3.2 Pravouglo koordinate na sferi .....	56
2.3.3 Polarne sferne koordinate .....	56
2.3.4 Poluprečnik krivine meridijana i paralele.....	57
2.3.5 Dužina luka meridijana i paralele .....	57
2.3.6 Površina sfernog trapeza .....	58
2.3.7 Geodetska linija i loksodroma na lopti .....	59
2.4 Koordinate na elipsoidu .....	60
2.4.1 Geodetske koordinate na elipsoidu .....	62
2.4.2 Normalni preseki i poluprečnici krivina .....	62
2.4.3 Poluprečnik krivine meridijana.....	63
2.4.4 Poluprečnik krivine paralele i poluprečnik krivine po prvom vertikalu.....	65
2.4.5 Poluprečnik krivine u proizvoljnom pravcu .....	66

2.4.6 Srednji poluprečnik krivine.....	66
2.4.7 Dužina meridijanskog luka .....	66
2.4.8 Dužina luka paralele .....	68
2.4.9 Površina elipsoidnog trapeza .....	68
2.4.10 Primer računanja ortodrome i loksodrome na elipsoidu.....	69
2.4.11 Pravouglo elipsoidne koordinate.....	71
2.5 Geodetski koordinatni referentni sistem .....	72
2.6 Koordinatni referentni sistem u projekciji .....	74
2.7 Uvod u PROJ biblioteku .....	75
2.8 WKT-2 .....	78
2.9 Primeri računanja na elipsoidu koristeći sf i s2 paket.....	79
3. Opšte jednačine kartografskih projekcija.....	83
3.1 Parametarske jednačine sfere .....	83
3.2 Parametarske jednačine elipsoida .....	86
3.3 Gausove fundamentalne veličine .....	87
3.3.1 Gausove fundamentalne veličine za elipsoid.....	88
3.4 Opšta teorija kartografskog preslikavanja .....	89
3.4.1 Linijski element u ravni karte .....	90
3.4.2 Linearna razmera .....	91
3.4.3 Razmer površina .....	95
3.4.4 Deformacije uglova.....	97
3.5 Elipsa deformacija (Tisoova indikatrisa).....	99
3.5.1 Elipsa deformacija konstrukcija.....	102
3.5.2 Elipsa deformacija alternativni način.....	104
3.6 Podela projekcija prema karakteru deformacija .....	110
3.6.1 Konformne projekcije .....	110
3.6.2 Istopovršinske (ekvivalentne projekcije) .....	110
3.6.3 Uslovne projekcije .....	111
3.7 Klasifikacija projekcija u odnosu na pomoćne projekcione površi .....	111
3.8 Klasifikacija projekcija u odnosu na položaj pomoćne projekcione površi .....	111
3.9 Klasifikacija projekcija u odnosu na zone .....	112
4. Cilindrične projekcije.....	115
4.1 Prave cilindrične projekcije .....	116
4.2 Prava konformna cilindrična projekcija – Merkatorova projekcija .....	119
4.2.1 Značaj i primena Merkatorove projekcije.....	129
4.2.2 Geodetska linija i loksodroma u Merkatorovoj projekciji .....	130
4.3 Merkatorova projekcija, primeri .....	131

4.3.1 Primer 1: Računanje koordinata jedne tačke, direktni zadatak.....	131
4.3.2 Primer 2: Računanje koordinata jedne tačke, srednji meridijan kao koordinatna osa .....	132
4.3.3 Primer 3: Računanje koordinata jedne tačke, zadavanje početne vrednosti u pravcu istoka ( <i>false easting</i> ) .....	133
4.3.4 Primer 4: Računanje deformacija.....	134
4.3.5 Primer 5: Grafik deformacija u zavisnosti od geodetske širine .....	135
4.3.6 Primer 6: Transformacija vektorskih podataka i karta.....	138
4.3.7 Primer 7: Loksodroma u Merkatorovoj projekciji .....	142
4.3.8 Primer 8: Primer inverznog zadatka kod Merkatorove projekcije.....	143
5. Konusne projekcije .....	146
5.1 Prave konusne projekcije .....	148
5.1.1 Određivanje konstante proporcionalnosti $k$ kod prave konusne projekcije dodirni konus .....	150
5.2 Prava konformna konusna projekcija.....	152
5.2.1 Određivanje konstanti kod dodirnog konusa .....	153
5.2.2 Određivanje konstanti kod sekućeg konusa pri konformnom preslikavanju, Lambertova projekcija .....	156
5.2.3 Inverzni zadatak kod Lambertove konusne konformne projekcije.....	158
5.2.4 Značaj i primena konusnih projekcija.....	158
5.3 Primeri, Lambertova konusna konformna .....	160
5.3.1 Primer 1: Transformisati podatke u Lambertovu konusnu konformnu projekciju.....	160
5.3.2 Primer 2: Koristeći prethodne podatke i granice država u Evropi kreirati kartu u Lambertovoj konusnoj konformnoj projekciji.....	163
5.3.3 Primer 3: Grafik deformacija u zavisnosti od geodetske širine .....	166
5.3.4 Primer 4: Inverzni zadatak Lambertova konusna konformna projekcija.....	170
6. Azimutne projekcije.....	172
6.1 Gnomonska projekcija .....	173
6.2 Stereografska projekcija.....	179
6.3 Ortografska projekcija .....	183
6.4 Kratak osvrt na istorijski značaj perspektivnih projekcija .....	187
6.5 Lambertova azimutna ekvivalentna projekcija .....	188
6.6 Azimutna ekvidistantna projekcija .....	190
6.7 Primeri računanja kod Azimutnih projekcija.....	193
6.7.1 Primer 1: Transformisati podatke u Lambertovu ekvivalentnu azimutnu projekciju .....	193
6.7.2 Primer 2: Koristeći prethodne podatke i granice država u Evropi kreirati kartu u Lambertovoj azimutnoj ekvivalentnoj projekciji.....	195
6.7.3 Primer 3: Dužina od Beograda do Tokija u Azimutnoj ekvidistantnoj projekciji .....	198

6.7.4 Primer 4: Inverzni zadatak Lambertova konusna konformna projekcija.....	200
7. Gaus-Kriggerova projekcija.....	202
7.1 Osnovne jednačine direktnog preslikavanja .....	202
7.1.1 Opšta formula za linearnu razmeru.....	202
7.1.2 Pravouglo koordinata .....	206
7.1.3 Razmera površina.....	214
7.1.4 Linearna razmera .....	216
7.1.5 Konvergencija meridijana.....	217
7.2 Inverzno preslikavanje .....	219
7.3 Određivanje širine zone preslikavanja .....	224
7.3.1 Određivanje širine zone za zadati uslov linearnih deformacija 1 dm/km.....	224
7.4 Stari državni koordinatni sistem (DKS) u Srbiji.....	226
7.5 Redukcija koordinata .....	226
7.5.1 Širina zone za stari DKS u Srbiji .....	227
7.6 Značaj Gaus-Kriggerove projekcije.....	231
7.7 Primeri u Gaus-Kriggerovoj projekciji .....	231
7.7.1 Primer 1: Računanje koordinata jedne tačke, direktni zadatak.....	231
7.7.2 Primer 2: Grafik deformacija u zavisnosti od geodetske dužine za fiksiranu geodetsku širinu .....	232
7.7.3 Primer 3: Napraviti kartu izokola u Gaus-Kriggerovoj projekciji .....	234
7.7.4 Primer 4: Transformacija vektorskih podataka iz WGS84 u GK (DKS).....	238
7.7.5 Primer 5: Inverzni zadatak Gaus-Kriggerova projekcija .....	242
7.7.6 Primer 6: Koordinate iste tačke u 6. i 7. zoni.....	244
8. UTM projekcija.....	246
8.1 Direktni zadatak (grupisane formule) .....	248
8.2 Inverzni zadatak .....	251
8.3 Značaj UTM projekcije.....	253
8.4 Primeri u UTM projekciji .....	253
8.4.1 Primer 1: Računanje koordinata jedne tačke, direktni zadatak.....	253
8.4.2 Primer 2: Grafik deformacija u zavisnosti od geodetske dužine za fiksiranu geodetsku širinu .....	254
8.4.3 Primer 3: Napraviti kartu izokola u UTM projekciji .....	256
8.4.4 Primer 4: Transformacija vektorskih podataka iz WGS84 u UTM (DKS) .....	260
8.4.5 Primer 5: Inverzni zadatak UTM projekcija .....	264
9. Pregled nekih značajnih globalnih projekcija .....	267
9.1 Polikonusne projekcije.....	267
9.1.1 Prosta (Američka) polikonusna projekcija.....	268



9.2 Pseudokonusne projekcije.....	269
9.2.1 Boneove projekcije .....	270
9.3 Pseudocilindrične projekcije.....	271
9.3.1 Sansonova ili Sinusoidalna projekcija .....	272
9.3.2 Molvajdova (Mollweide) eliptična projekcija .....	273
9.4 Van der Gritenova projekcija.....	275
9.5 Robinsonova projekcija .....	277
9.6 Ekui7Grid.....	279
10. Rad sa rasterima i koordinatne transformacije.....	282
10.1 Projekcije i transformacije rasterskih podataka .....	282
10.2 Helmertova i gridna koordinatna transformacija .....	293
10.3 Afina transformacija .....	296
Literatura:.....	301



## Predgovor

U današnje vreme sve češće se u svakodnevnom životu srećemo sa pozicioniranjem u prostoru kroz razne lokacijski bazirane servise, kao što su aplikacije za navigaciju, geomarketing, praćenje pošiljke u realnom vremenu i drugo. U ovoj knjizi se proučava matematička kartografija koja uključuje i manipulisanje koordinatnim referentnim sistemima i kartografskim projekcijama. Kartografske projekcije su matematičke funkcije preslikavanja koje omogućavaju preslikavanje sfernih ili elipsoidnih koordinata na ravne karte ili ekrane, čime se omogućavaju lakše razumevanje i analiza prostornih podataka i informacija. U savremenom svetu, gde je informaciona tehnologija od velikog značaja, razumevanje kartografskih projekcija presudno je za pravilno korišćenje podataka u geodeziji i geoinformatici, uključujući i geografske informacione sisteme (GIS) i druge geoprostorne alate. Bez znanja o tome kako se prostorni podaci transformišu i prikazuju na različitim uređajima, teško je efikasno koristiti i interpretirati tehnološke alate koji se oslanjaju na prostorne informacije.

U poslednje vreme u porastu je i oblast koja se bavi naukom o podacima i prostornim podacima (*Spatial data science*, videti npr. Pebesma and Bivand (2023a)). Pebesma i Bivand (Pebesma and Bivand 2023a) navode moguće greške kod olake interpretacije podataka o prostoru gde su koordinate uzete u obzir u podacima samo kao „obične“ dodatne promenljive.

Često se smatra da se prostorni podaci svode na to da imaju geodetsku dužinu i širinu uz opažanja u skupu podataka i da ih tretiraju kao bilo koju drugu promenljivu. To nosi rizik od nepotpunih i nepreciznih analiza podataka. Na primer:

- koordinatni parovi su zaista parovi i gube veliki deo svog značenja kada se tretiraju nezavisno,
- opažanja su često povezana sa složenijim prostornim primitivima ne samo u obliku tačke već sa: prostornim linijama, poligonima ili pikselima,
- prostorne udaljenosti između opažanja često nisu dobro predstavljene pravolinijskim rastojanjima, već dužinom geodetske linije, rastojanjima kroz mreže ili merenjem rada koji je potreban da se dođe od tačke A do tačke B.

Planeta Zemlja je složenog oblika i jedna od aproksimacija oblika Zemlje je sfera ili elipsoid. Kad manipulišemo prostornim podacima na računaru ili drugom uređaju pa želimo da ih vizualizujemo, prikaz koji vidimo na ekranu je projekcija. Kad vizuelizujemo prostorne podatke, na bilo koji način, prikazujemo Svet ili njegov deo na ravnom uređaju, vršimo projekciju: pretvaramo elipsoidne koordinate u kartezijanske pravouglove koordinate u ravni ekrana. Čak i prikaz prostora u obliku virtuelnih globusa je takav da koristi projekciju za prikaz na ekranu, npr. Ortografsku azimutnu projekciju.

Razlog zašto je važno učiti oblasti matematičke kartografije proističe iz nekoliko ključnih činjenica. Prvo, s obzirom na to da se oblik Zemlje dobro aproksimira elipsoidom, nemoguće je precizno prikazati Zemlju ili deo planete Zemlje na ravnoj površini bez nekih kompromisa, pratećih deformacija dužina, oblika ili površina. Ovi kompromisi se postižu upotrebom različitih matematičkih metoda za projekciju, svaka sa svojim prednostima i nedostacima. Razumevanje ovih metoda omogućava nam da bolje tumačimo karte i prostorne informacije koje koristimo svakodnevno.

Drugo, kartografske projekcije imaju direktni uticaj na naše shvatanje sveta i prostora. Način na koji se određena oblast prikazuje na karti može uticati na našu percepciju veličine, oblika i udaljenosti tog područja, uključujući i prostorne oblike (uglove) i odnose. Ponekad deformacije koje su neizbežne kod kartografskog projiciranja mogu dovesti do netačnih zaključaka ili pogrešnih interpretacija. Stoga je ključno razumeti kako projekcije funkcionišu kako bismo mogli kritički analizirati karte i prostorne podatke i informacije koje koristimo.

Treće, bez znanja o tome kako se prostorni podaci transformišu i prikazuju uključujući prostiranje deformacija, teško je efikasno koristiti dostupne tehnološke alate i softvere koji su nam neophodni za praktične zadatke iz oblasti geodezije, geoinformatike, GIS-a; ali i u drugim oblastima koje koriste tehnike prostornog i prostorno vremenskog modeliranja radi razumevanja prostiranja prostornih fenomena procesa koji se dešavaju na Zemlji.

Knjiga je podeljena u dve celine. Prvi deo obuhvata uvod u kartografiju i opštu teoriju kartografskog preslikavanja. Prvi deo sadrži tri poglavlja (sa praktičnim primerima u programskim jezicima R i Pajton):

1. **Uvod u kartografiju** (Ovo poglavlje posvećeno je proučavanju ključnih elemenata kartografije koji čine osnovu za dublje razumevanje ove naučne discipline, uključujući i matematičku kartografiju.)
2. **Referentne površi i koordinatni referentni sistemi** (Ovo poglavlje predstavlja ukorenjene koncepte geodetskih koordinata i njihovu primenu u različitim koordinatnim referentnim sistemima. Računanja u ravni, sferi i na elipsoidu prikazana su u ovom delu knjige.)
3. **Opšte jednačine kartografskih projekcija** (U ovom poglavlju predstavljeni su ključni koncepti kartografskog preslikavanja, praktično ovi koncepti se mogu primeniti na bilo koju konkretnu projekciju.)

Drugi deo knjige odnosi se na najznačajnije kartografske projekcije koje se koriste u praksi, za razliku od dosadašnje literature na srpskom jeziku, npr. Jovanović (1984) za svaku projekciju je dato rešenje i inverznog zadatka ne samo za Gaus-Krugerovu i UTM projekciju, u ovom delu data su poglavlja:

4. **Cilindrične projekcije** (Pored podele cilindričnih projekcija u ovom poglavlju su detaljno predstavljene prave cilindrične projekcije sa izvođenjem formula za opšti slučaj svih pravih cilindričnih projekcija. Detaljno su razrađene prave konformne cilindrične projekcije za slučaj dodirnog (Merkatorova projekcija) i sekućeg cilindra. Razrada drugih oblika cilindričnih projekcija nije data, ali principijelno izvođenje predstavljeno za slučaj Merkatorove projekcije može se primeniti na sličan način kod svih ostalih cilindričnih projekcija. Na kraju ovog poglavlja sledi 8 primera za računanje direktnog, inverznog zadatka, kao i pratećih deformacija u programskim jezicima R i Pajton.)
5. **Konusne projekcije** (U ovom poglavlju predstavljene su različite varijacije konusnih projekcija, naglašavajući njihove ključne karakteristike i primene. Opisana je i razrađena prava konusna konformna projekcija, naglašavajući njen značaj za očuvanje uglova i oblika sa varijantom dodirnog i sekućeg konusa. Na kraju, korišćena je Lambertova konusna konformna projekcija kako bi se pružili praktični primeri računanja koordinata i deformacionih parametara u programskim jezicima R i Pajton.)
6. **Azimetne projekcije** (U ovom poglavlju predstavljene su azimetne (ili perspektivne, zenitne) projekcije. Kod ovih projekcija preslikavanje se vrši direktno na ravan koja je tipično tangirajuća na različite tačke Zemljine lopte kao što su polovi, tačka na Ekvatoru ili tačka u centru područja preslikavanja. Na kraju poglavlja su praktični

primeri koji se odnose na razne varijante azimutnih projekcija dati u programskim jezicima R i Pajton.)

7. **Gaus-Krugerova projekcija** (Gaus-Krugerova projekcija sa razradom i praktičnim primerima.)
8. **UTM projekcija** (UTM projekcija sa razradom i praktičnim primerima.)
9. **Pregled nekih značajnih globalnih projekcija** (Ovo poglavlje prikazuje različite vrste kartografskih projekcija. Prikazano je nekoliko tipova projekcija, uključujući polikonusne, pseudokonusne i pseudocilindrične projekcije. Takođe, razmatraju se specifične projekcije kao što su Van der Griten projekcija, Robinsonova projekcija i Ekui7Grid.)
10. **Rad sa rasterima i koordinatne transformacije** (U prethodnom delu knjige, do poslednjeg poglavlja uglavnom su primeri primenjeni nad vektorskim podacima. U drugom delu knjige su primeri koji se odnose na prvi (direktni) i drugi (inverzni) zadatak matematičke kartografije zajedno sa pojedinim primerima koji uključuju i transformacije iz jednog koordinatnog sistema u drugi, ali nad vektorskim podacima. U ovom poglavlju će biti prikazana primena projekcija i koordinatnih transformacija nad rasterskim podacima, kao i koordinatne transformacije iz jednog koordinatnog sistema u drugi u opštem slučaju uključujući Helmertovu datumsku transformaciju, gridnu transformaciju i afinu dvodimenzionalnu transformaciju.)

Ova knjiga je besplatna u elektronskom izdanju ((elektronska verzija je dostupna na adresi: <https://osgl.grf.bg.ac.rs/books/mk/> licenca **CC BY-NC-ND 4.0**) i svi primeri su napravljeni tako da se mogu reprodukovati u R ili Pajton programskom jeziku, ima primera koji su dati samo u programskom jeziku R.

Srećno!

Autor, Beograd, avgust 2023