
TQU Verlag
Die Multivariate
Prozessfähigkeit

QUALITY APPs Applikationen für das Qualitätsmanagement

Probieren und Studieren

Die multivariate Prozessfähigkeit (Schießscheibe)

Qualität verstehen durch Berücksichtigung von Korrelationen

Dr. Walter Jahn †
Dr. Konrad Reuter

Peter Shainin: "Jedes Werkstück ist ein Fingerabdruck des Prozesses, mit dem es hergestellt wurde." Kennt man genügend Werkstücke, kennt man die Eigenschaften des Prozesses!
Seine eigenen Herstellprozesse zu kennen, ist nicht nur für den Produktionschef wichtig. Alle in der Wertschöpfungskette Beteiligten können so ihre Entscheidungen auf einer zuverlässigeren Basis treffen. Mit den Methoden des Qualitätsmanagements können die "Fingerabdrücke" gelesen und entschlüsselt werden. Insbesondere ist die technische Statistik ein wirksames Hilfsmittel. Sie hilft zu verstehen, wie ein Prozess tickt". Qualitäts- und Produktivitätssteigerungen werden möglich, Kosten können gesenkt werden, Unternehmen werden erfolgreicher.

Die wesentlichen Eigenschaften eines Produktes werden durch

- die Werte seiner Variablen,
- die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Produktvariablen,
- nicht zuletzt die Qualität im Sinne der simultanen Erfüllung der Kundenanforderungen

beschrieben.

Um dieses Verständnis zu trainieren, kann man Produktmerkmale simulieren und in ihrer Wirkung beobachten.
Dazu gehören Lageabweichungen, Streuungen und Korrelationen. Ausdruck der Simulation von zwei Merkmalen ist das virtuelle Schießen auf eine Schießscheibe.

Mit diesem QUALITY APP aus der Reihe "Probieren und Studieren" können interessante zweidimensionale statistische Anwendungsfälle simuliert, in ihrer Wirkung beobachtet und verstanden werden. Es unterstützt Personen, die mit Prozessverbesserungen beauftragt oder in entsprechenden Vorhaben eingebunden sind, zum Beispiel in Six Sigma Projekten oder in Lean Manufacturing Programmen. Das APP enthält Makros, die vor der Anwendung freigegeben werden müssen.

TQU Verlag, Magirus-Deutz-Straße 18, 89077 Ulm Deutschland, Telefon 0731/14660200, verlag@tqu-group.com, www.tqu-verlag.com

QUALITY APPs Applikationen für das Qualitätsmanagement

Lizenzvereinbarung

Dieses Produkt "Multivariate Prozessfähigkeit" wurde von uns mit großem Aufwand und großer Sorgfalt hergestellt. Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt (©). Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Weitergabe, der Übersetzung, des Kopierens, der Entnahme von Teilen oder der Speicherung bleiben vorbehalten.

Bei Fehlern, die zu einer wesentlichen Beeinträchtigung der Nutzung dieses Softwareprodukts führen, leisten wir kostenlos Ersatz. Beschreibungen und Funktionen verstehen sich als Beschreibungen von Nutzungsmöglichkeiten und nicht als rechtlich verbindliche Zusicherung bestimmter Eigenschaften. Wir übernehmen keine Gewähr dafür, dass die angebotenen Lösungen für bestimmte vom Kunden beabsichtigte Zwecke geeignet sind.

Sie erklären sich damit einverstanden, dieses Produkt nur für Ihre eigenen Zwecke und für die Information innerhalb Ihres Unternehmens zu verwenden. Sollten Sie es in anderer Form, insbesondere in Schulungs- und Informationsmaßnahmen bei anderen Unternehmen (Beratung, Schulungseinrichtung etc.) verwenden wollen, setzen Sie sich unbedingt vorher mit uns wegen einer entsprechenden Vereinbarung in Verbindung. Unsere Produkte werden kontinuierlich weiterentwickelt. Bitte melden Sie sich, wenn Sie ein Update wünschen.

Alle Ergebnisse basieren auf den vom Autor eingesetzten Formeln und müssen vom Anwender sorgfältig geprüft werden. Die berechneten Ergebnisse sind als Hinweise und Anregungen zu verstehen.

Wir wünschen viel Spaß und Anregungen mit dieser Applikation

TQU Verlag, Magirus-Deutz-Straße 18, 89077 Ulm Deutschland, Telefon 0731/14660200, verlag@tqu-group.com, www.tqu-verlag.com

QUALITY APPs Applikationen für das Qualitätsmanagement

Hinweis:
Dieses QUALITY APP ist zur Beurteilung der Qualität von Prozessen und Produkten mit multivariaten Fähigkeitsindizes entwickelt worden. Multivariate Beziehungen zwischen den Ursachen von Merkmalsabweichungen kommen in der Praxis häufig vor, werden aber in der Regel univariat gelöst, was in einigen Fällen zu unzulässigen Schlußfolgerungen führen kann. Das APP enthält Makros, die vor der Benutzung frei gegeben werden müssen.

Lösung:

Es wird zunächst der Fall m = 2 betrachtet. Der Fall m = 3 und die Verallgemeinerung werden in einem weiteren APP vorgestellt.

Die Simulation wird durch Variation generiert:
- der Anzahl der fiktiven Produkte
- die Streuungen
- die Lage der Punktwolke für die Variablen Y_1, Y_2 (Mittelpunkt)
- die Größe des Korrelationskoeffizienten ($-1 \le r_{jk} \le 1$, j,k = 1,2)

Für den Fall m = 2 wird die Schießscheibe als Demonstrationsobjekt und Arbeitsblatt gewählt.
Mit Hilfe von Schiebereglern können folgende Eigenschaften verändert werden:
Die Anzahl der Schüsse n auf die Scheibe (Stichprobe)
Die Abweichung der mittleren Lage des Schussbildes in Y1 und Y2 Richtung (Zielabweichung)
Die Streuung innerhalb des Schussbildes in Y1 und Y2 Richtung
Die Korrelation zwischen den Y1 und Y2 Abweichungen

Durch folgende Einstellung kann der Vorgang justiert werden: n=1, Streuung Y1 und Y2 = Null

Anwendung:
Das QUALITY APP unterstützt Einzelpersonen oder Lerngruppen, die sich mit den Grundlagen der Prozess- und Produktbewertung mit Hilfe statistischer Kenngrößen auseinander setzen.

Nutzung:
Das APP ist zu Probier- und Studierzwecken geeignet.

Schutz:
Dieses APP ist lauffähig unter Excel 2003 und aufwärts
Bei den eingetragenen Daten handelt es sich um Testdaten, sie müssen vor der Anwendung vom Benutzer gelöscht bzw. ersetzt werden.
Die Mappe ist insgesamt geschützt. Der Schutz kann nicht aufgehoben werden.
Die einzelnen Blätter der Mappe sind durch einfachen Excel-Schutz geschützt.
Werden vom Anwender die eingerichteten Schutzmaßnahmen aufgehoben, lehnen der Autor und der Verlag alle weiteren Verpflichtungen ab.

Ergebnisse:
Alle Ergebnisse beruhen auf den von den Autoren eingesetzten Regeln und Berechnungen, sie müssen vom Anwender sorgfältig auf ihre Eignung geprüft werden.
Die berechneten Ergebnisse aus den Beispieldaten sind als Vorschläge, Hinweise oder Anregungen zu verstehen.

TQU Verlag, Magirus-Deutz-Straße 18, 89077 Ulm Deutschland, Telefon 0731/14660200, verlag@tqu-group.com, www.tqu-verlag.com

QUALITY APPs Applikationen für das Qualitätsmanagement

1. Statistik — Blatt

1.1 Motivation

Jedes Produkt ist das Ergebnis eines Prozesses. Produktvariable sind deshalb stochastisch.
Jedes Produkt wird durch mehrere, m ≥ 1 Produktvariable (Y_1, Y_2 …Y_m) beschrieben.
Die Produktvariablen sind meist nicht unabhängig voneinander.
Die Produktvariablen (Y_1, Y_2 …Y_m) sind folglich durch eine Abhängigkeitsstruktur mit unterschiedlichen Korrelationen miteinander verbunden.
Diese Abhängigkeitsstruktur ist in der Regel sehr stabil, da sie durch die naturgesetzliche Ursache/Wirkungsbeziehung geprägt ist.

Ein Prozess wird fähig genannt, wenn er die spezifizierten Kundenanforderungen simultan erfüllt, d.h. wenn die Wertesätze für alle Produktvariablen innerhalb des Toleranzbereiches liegen.

Es macht daher wenig Sinn:

- die Erfüllung der Kundenanforderungen durch die Werte der Produktvariablen einzeln mit den univariaten Prozessfähigkeitsindizes zu beurteilen und zu versuchen, Entscheidungen daraus zu treffen denn,
- für den Nachweis der Erfüllung aller Kundenanforderungen steht nur die Irrtumswahrscheinlichkeit α, $0 < \alpha < 1$, α möglichst klein (hier wird α = 0.0027 gewählt) zur Verfügung
- Verwendet man die univariaten Prozessfähigkeitsindizes dann wird die Irrtumswahrscheinlichkeit schon bei einer Produktvariablen verbraucht,
- d.h. bei mehreren Variablen wird die Möglichkeit von Fehlentscheidungen immer höher!
- einen Toleranzraum anzunehmen, der den naturgesetzlichen Wirkungsbedingungen widerspricht.

1.2 Analyse von simulierten Produkten

Die Analyse des Prozesses beginnt zwingend mit der Berechnung der Abhängigkeitsstruktur. — Berechnung

Auf die vorliegenden Daten sind die folgenden Methoden anzuwenden:

- Errechnung der Mittelwerte (Mittelwertvektor)
- Errechnung der Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrix, $\boldsymbol{R}_{YY}$ bzw $\boldsymbol{S}_{YY}$.
- Errechnung des Grades der Multikollinearität δ.
- Großes δ bedeutet straffere Abhängigkeiten.

Für den weiteren Umgang mit diesen Ergebnissen ist die Matrizenrechnung ein unerlässliches Werkzeug (siehe EXCEL).

1.3 Berechnung Multivariate Prozessfähigkeit

Die Multivariaten Prozessfähigkeitsindizes werden über den Quotienten zweier quadratischer Formen mit der Stichprobenkovarianzmatrix $\mathbf{S}_{YY}$ im Zähler und einer kundenspezifischen theoretischen Kovarianzmatrix Σ^*_{YY} im Nenner berechnet. Berechnung

(die mathematische Ableitung ist in [1] nachvollziehbar).

De Diagonalelemente der inversen Kovarianzmatrix sind die bedingten Varianzen für die einzelnen Produktvariablen.

Diese sind nichtlinear vom Grad der Multikollinearität abhängig.

Die multivariaten Prozessfähigkeitsindizes können daher wie folgt definiert werden (Matrizenschreibweise).

$$MC_p = \sqrt{\frac{(T)^T \, S_{YY}^{-1} \, (T)}{(T)^T \left(\Sigma^*_{YY}\right)^{-1} (T)}} \qquad MC_{pk} = MC_p / K$$

mit

$$K = \sqrt{1 + \left|\overline{Y} - Soll\right|^T \left(\Sigma^*_{YY}\right)^{-1} \left|\overline{Y} - Soll\right|}$$

Mit m ist die Anzahl der Variablen gegeben.

$\boldsymbol{T}^T = (T_1, T_2)$ ist der Vektor der Toleranzen mit $T_i = T_{o..i} - T_{u.i}$, j = 1,2 .

$\overline{Y}$ Ist der Vektor der Mittelwerte der Stichprobe.

"*Soll*" ist der Vektor der Zielwerte (Toleranzmitten).

Der Ausdruck $\boldsymbol{S}_{YY}$ für die Kovarianzmatrix beinhaltet die Abhängigkeitsstruktur der Produktvariablen.

Der Ausdruck $\sum^*_{YY}$ ist die "theoretische Kovarianzmatrix" im Sinne der Kundenanforderung.

Die theoretische Kovarianzmatrix wird gebildet durch Multiplikation einer bekannten zum Prozess gehörenden oder der Stichprobenkorrelationsmatrix mit der Diagonalmatrix der kundenspezifischen Streuungen, Tj/6 (nach der ±3 Sigma Regel) wie folgt:

$$\Sigma^*_{YY} = diag\begin{pmatrix} \frac{T_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{T_2}{6} \end{pmatrix} * R_{YY} * diag\begin{pmatrix} \frac{T_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{T_2}{6} \end{pmatrix}$$

Für den unabhängigen Fall wird die Korrelationsmatrix $\boldsymbol{R}_{YY} = \boldsymbol{I}$ verwendet, denn in diesemFall sind alle Korrelationen gleich Null (mit $\boldsymbol{I}$ als Einheitsmatrix).

Die univariaten Prozessfähigkeiten werden in der klassischen Weise und zusätzlich mit einer Korrektur nach Bonferroni berechnet, welche die Anzahl der Variablen in ihrer Auswirkung auf die Irrtumswahrscheinlichkeit berücksichtigt. Der Bereich "**±3** Sigma" in univariater Sicht wird dabei mit einem Korrekturfaktor in Abhängigkeit von ***m*** aufgeweitet.

1.4 Grafische Darstellung

Die "Zielscheibe" bietet die Ergebnisse der Simulation an und damit einen Eindruck von bivariater Streuung. Zielscheibe

Der zentrale schwarze Bereich soll die Kundenanforderungen darstellen, die zu treffen sind (Toleranzraum eigentlich kreisförmig).

Das "Streudiagramm" zeigt die Toleranzgrenzen, den Toleranzraum und die univariaten Verteilungen der Variablen $\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{Y}_2$ sowie alle Datenpunkte aus der Simulation. Streudiagramm

Werden die beiden Variablen Y_1 und Y_2 als unabhängig vorausgesetzt und wird angenommen, dass die beiden Streuungen gleich sind folgt:

- der Toleranzbereich ist ein Quadrat und
- das Streuungsgebiet ist ein Kreis (die Punktwolke der Treffer liegt in einem Kreis).

Sind die beiden Varianzen ungleich, dann sollten die Toleranzen ebenfalls ungleich sein. In diesem Falle ist

- der Toleranzbereich ein Rechteck und
- das Streuungsgebiet eine Ellipse, deren Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Ist der Korrelationskoeffizient $r_{12} \neq 0$ zwischen den beiden Variablen Y_1 und Y_2, so bewirkt dieser eine Drehung der Ellipse in mathematisch positive oder negative Richtung.

Eine grafische Darstellung mehrdimensionaler Toleranzräume ist nur noch bis m=3 sinnvoll, mit EXCEL aber sehr aufwändig und wurde deshalb hier nicht versucht.

In der Regel werden 2-dimensionale Schnitte analog dem Streudiagramm grafisch dargestellt.

1.5 Diskussion der Ergebnisse

Zum Kennenlernen der Multivariaten Prozessfähigkeitsindices sollten Sie wie folgt vorgehen:

1. Ausgangspunkt ist der Auslieferungszustand mit dem unkorrelierten Fall für Toleranzraum und Variablen, mit gleichen Streuungen der Variablen und der Zentrierung auf die Toleranzmitten.
   Die Streuungen so gewählt, dass diese Cp = 1.67 erreichen.
   Das Ergebnis ist im Streudiagramm dargestellt und auf der Schießscheibe zu erleben (Taste F9).
   Die Ergebnisse der univariaten Cp und der MCp sind identisch. Die Stichprobenergebnisse streuen.

   Im Ergebniss der Korrektur nach Bonferroni zur Berücksichtigung der Irrtumswahrscheinlichkeit fallen die univariaten Prozessfähigkeiten geringer aus!

2. Als erste Variation sollten Sie die Lageverschiebungen (Zielabweichungen auf der Scheibe) beobachten.
   Die C_{pk} und MC_{pk} werden sich verringern.
3. Als nächste Variation sollten Sie die Streuungen ändern. Die Streukreise wandeln sich zu Ellipsen.
4. Als spannendste Variation sollten Sie die Korrelation ändern.
   Die Streckung des Kreises zur Ellipse bewirkt eine Verringerung der M**C_p.**
5. Im Blatt Berechnung übernehmen Sie den Wert von r_{12s} in den Wert für r_{12}. **pink**
   Der Toleranzraum wird sich jetzt ebenfalls als Ellipse darstellen.
   Die MCp werden Sie als realistisch gegenüber diesem Toleranzraum erkennen.

Variationen von Korrelationskoeffizienten mit gegensätzlichen Vorzeichen sind im Grunde unsinnig.

Die Änderung des Vorzeichens des Korrelationskoeffizienten führt zu einem vollkommen anderen Prozess.

Bemerkung:

Wenn der Korrelationskoeffizient sich signifikant vergrößert und das Vorzeichen negativ wird, wird der Wert für MCp größer als im positiven Fall. Ursache hierfür ist die Nichtbeachtung dieser beiden Veränderungen bei der Tolerierung (Behauptung der Unabhängigkeit).

Sie können den Ausgangszustand jederzeit wieder einstellen (Steuerung auf Null fahren und Lageverschiebung justieren, anschließend Streuungen auf den Wert 13 fahren).

Die Vergleiche der Ergebnisse von MC_p und MC_{Pk} in Verbindung mit den jeweiligen univariaten Indizes führen auf die Spur von Störungen im Prozess und damit zu Chancen für deren Abstellung [3].

Bei Auftreten einer sehr hohen Korrelationen zwischen zweien oder mehreren Variablen (hoher Grad der Multikollinearität) ist zu überlegen, ob eine oder mehrere Variable redundant sind (siehe [2]).

In diesem Falle ist die betreffende Variable aus der Stichprobe zu entfernen, da es sonst zu unsinnigen Ergebnissen kommen kann.

Die Analyse der Ergebnisse wird häufig dazu führen, über eine statistische Tolerierung nachzudenken [2], die eben auch die Zusammenhänge zwischen Merkmalen berücksichtigt.

Die unter 1. festgestellte Problematik bezüglich der Vergrößerung der Irrtumswahrscheinlchkeit trifft natürlich auch für Regelkarten zu.
Multivariate Regelkarten sollen in einem weitere APP vorgestellt werden.

2. EXCEL

Die Berechnungen sind ohne feste Rundungen dargestellt.
Die Lösung verwendet vorzugsweise EXCEL Namen für Variable, Faktoren, Vektoren und Matrizen.
Für die Datenbereiche werden teilweise sog. dynamische Namen verwendet, die sich automatisch dem gewünschten Datenbereich anpassen.
Damit kann z.B. eine variable Stichprobenanzahl (Schuss) ausgewählt werden.

Die verwendeten EXCEL Namen sind aufgelistet. Namen
EXCEL-TIP > Die Liste der verwendeten Namen wird über die Funktionstaste F3 ausgegeben
Blätter mit Hilfsrechnungen oder Diagrammdaten sind ausgeblendet Ellipsen
Auf den Berechnungsblättern sind Tabellenfelder zur besseren Orientierung farbig unterlegt:

freie Eingabefelder	
Beschriftungen	
Ergebnisse (keine Einträge vornehmen)	
besondere Eingaben	
Berechnungen in Blättern für Grafikdaten	

Die Gitternetzlinien und Spalten/Zeilenüberschriften sind auf den Berechnungsblättern der Übersichtlichkeit wegen ausgeblendet.
EXCEL kann eine Reihe von Matrizenoperationen ausführen, die im vorliegenden Fall erforderlich sind.
=MTRANS(**A**) Transponieren einer Matrix **A**
=MMULT(**A;B**) Multiplikation der Matrizen **A** und **B**, die Regeln der Matrizenmultiplikaton sind zu beachten!
=MINV(**A**) Inversion einer Matrix **A** zu $\mathbf{A}^{-1}$ (Kehrmatrix)
=MDET(**A**) Determinante von **A**

EXCEL-TIP > Zur Anwendung der Matrixfunktionen muss der jeweilige Zellbereich komplett markiert werden. Der Abschluss des Formelassistenten darf jetzt nicht durch den "OK" Button, sondern muss durch die Tastenkombination **"strg", "shift", "enter"** erfolgen (beidhändig).
Als sichtbare Information wird die Formel durch EXCEL in der Eingabezeile in geschwungene Klammern gesetzt {}.
Diese Klammern können nicht manuell eingegeben werden.
Matrixfunktionen können nur noch für den gesamten zutreffenden Bereich geändert werden.

Im übrigen können auch "einfache" Funktionen zur Matrixfunktion aufgewertet weden und erreichen eine deutlich erweiterte Performance (erspart zusätzliche Berechnungen oder gar das Programmieren).

Änderungen an der Datei sollten protokolliert werden.

Die Diagramme sind "XY-Diagramme". Der "Zielscheibe" ist eine Grafik einer Originalscheibe unterlegt. Die "Einschusslöcher" sind mit der Formatierung der Datenpunkte erzeugt.
Die Berücksichtigung angeschossener Ringe ist in den Klassengrenzen bei der Häufigkeit eingearbeitet.

Die Auswahl der Werte für die Simulation wird durch die Bildlaufleisten auf der Zielscheibe erzeugt.

Die Grafiken sind mit festen Skalenwerten formatiert, die auch nicht geändert werden sollten (Verzerrung der Kreisform).

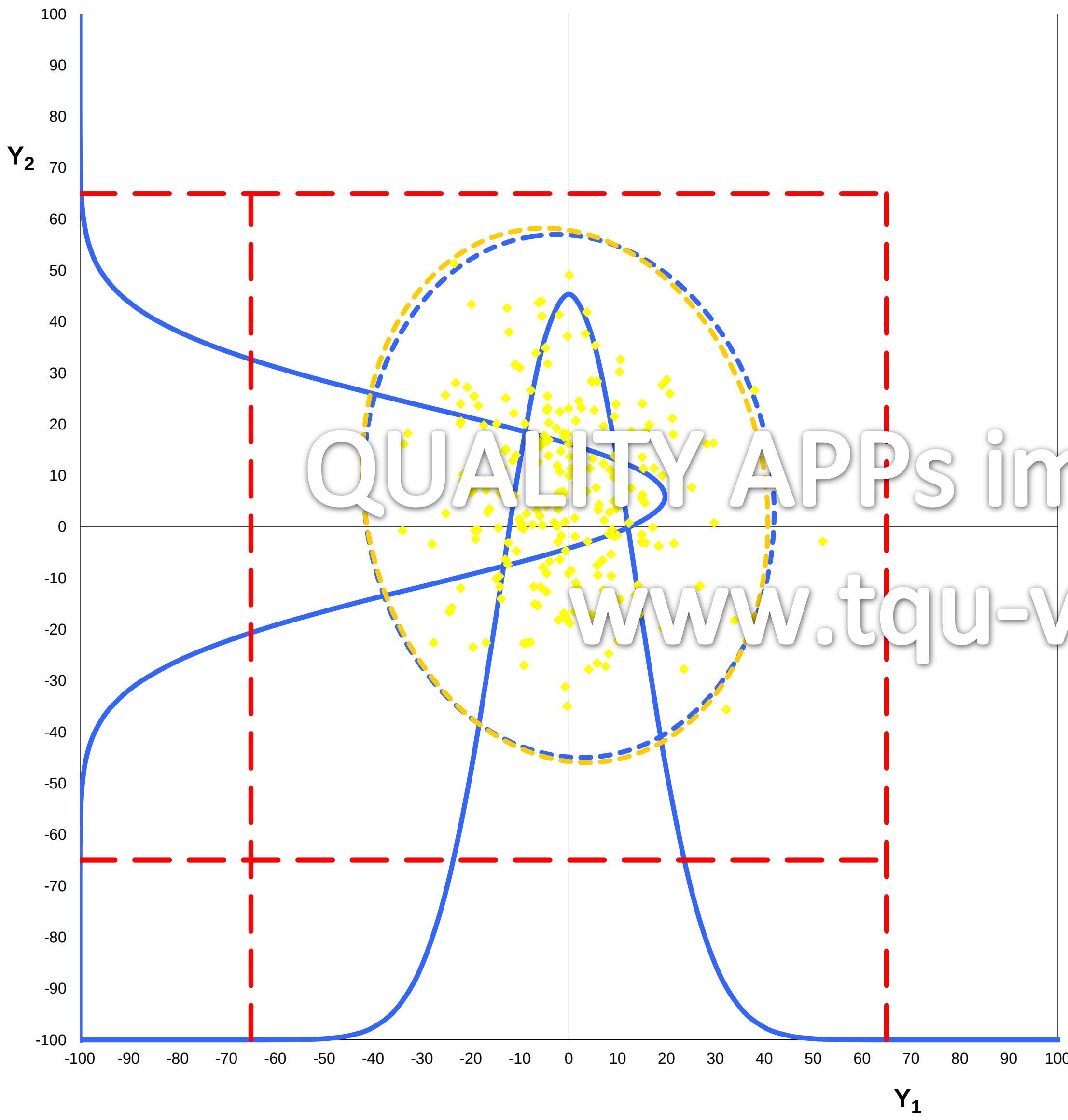
Eine Bemerkung zu Zufallszahlen in EXCEL. Microsoft verwendet natürlich auch nur sog. Pseudozufallszahlen, was für diese Anwendung auch nicht hinderlich ist.
Hinderlich ist hingegen, daß EXCEL 2003 aus unerfindlichen Gründen gelegentlich auch einmal negative Zufallszahlen produziert.
Aus diesem Grunde wurden die Zufallszahlen mit der ABS() Funktion "behandelt".

3. empfehlenswerte Literatur

[1] Jahn, W. Braun, L.: Praxisleitfaden Qualität - Prozessoptimierung mit multivariater Statistik in 150 Beispielen.
Carl Hanser Verlag, München 2006
[2] Jahn, W. Reuter, K.: Komplex, aber beherrschbar. QZ (2011)5, S.34
[3] QUALITY APP "Prozessverbesserung Multivariat", TQU Verlag 2011

TQU Verlag, Magirus-Deutz-Straße 18, 89077 Ulm Deutschland, Telefon 0731/14660200, verlag@tqu-group.com, www.tqu-verlag.com

neue Serie mit F9 auslösen
Zielabweichung Y_2
+
Korrelation r
-0,06
-
37
Anzahl Schuss n
Zielabweichung Y_1
Streuung Y_1


Y2
Y1
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
-100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Kundenanforderungen				
Variable	Soll	T u	T o	T
Y_1	0,00	-65,0	65,0	130,0
Y_2	0,00	-65,0	65,0	130,0

r_{12}	0,00	p	0,0027
m	2	Chi²	8,9999

Parameter der Simulation		
	μ	σ
Y_1	0,00	14,00
Y_2	6,00	17,00

r_{12S}	-0,06

Statistik der Stichprobe		
	$\bar{Y}$	s
$Y_{1'}$	-0,763	13,8448
$Y_{2'}$	6,10044	17,3689

r'_{12}	-0,10
n	250

es ist mindestens n=1 Schuss auf der Zielscheibe

Werte aus Bildlaufleisten			
	delta_mean	sigma	
Y_1	100	14	
Y_2	94	13	
Stichprobenumfang für Scheibe		37	14
Korrelationskoeffizient Prozess		53	

Korrelationsmatrix der Grundgesamtheit		
	Y_1	Y_2
Y_1	1	0,000
Y_2	0,000	1

Y_1	21,667	0	Diagonalmatrix
Y_2	0	21,667	

Korrelationsmatrix		
R_{YY}	Y_1	Y_2
Y_1	1	-0,0600
Y_2	-0,0600	1
Det (R_{YY})	0,996	
[illegible]	[illegible]	

Korrelationsmatrix Stichprobe		
R'_{YY}	$Y_{1'}$	$Y_{2'}$
$Y_{1'}$	1	-0,105
$Y_{2'}$	-0,105	1
Det (R_{YY})	0,989	
[illegible]	1,011	

Determinante der Korrelationsmatrix

Grad der Multikollinearität, Kehrwert der Determinante

Kovarianzmatrix		
Σ^*_{YY}	Y_1	Y_2
Y_1	469,444	0,000
Y_2	0,000	469,444

Kovarianzmatrix		
S_{YY}	Y_1	Y_2
Y_1	[illegible]	-14,28
Y_2	[illegible]	[illegible]

Kovarianzmatrix Stichprobe		
S'_{YY}	$Y_{1'}$	$Y_{2'}$
$Y_{1'}$	191,678	-25,177
$Y_{2'}$	-25,177	301,677

Inverse Kovarianzmatrix		
$(\Sigma^*_{yy})^{-1}$	Y_1	Y_2
Y_1	0,0021	0,0000
Y_2	0,0000	0,0021

Inverse Kovarianzmatrix		
S_{YY}^{-1}	Y_1	Y_2
Y_1	0,0051	0,0003
Y_2	0,0003	0,0035

Inverse Kovarianzmatrix		
S'^{-1}_{YY}	$Y_{1'}$	$Y_{2'}$
$Y_{1'}$	0,0053	0,0004
$Y_{2'}$	0,0004	0,0034

Prozessfähigkeiten		
	Y_1	Y_2
C_p	1,55	1,27
C_{pk}	1,55	1,16
$C_{p'}$	1,45	1,19
$C_{pk'}$	1,45	1,08
MC_p	1,46	
MC_{pk}	1,41	

Bemerkung zu 1.5 beachten!

Prozessfähigkeiten Stichprobe		
	$Y_{1'}$	$Y_{2'}$
C_p	1,56	1,25
C_{pk}	1,55	1,13
$C_{p'}$	1,46	1,17
$C_{pk'}$	1,46	1,06
MC_p	1,49	
MC_{pk}	1,44	

Korrektur nach Bonferroni C_p'				
p	0,0027	3 s	6 s	m
p'	0,0013	3,21 s	6,41 s	2

$$MC_p = \sqrt{\frac{(T)^T S_{YY}^{-1} (T)}{(T)^T (\Sigma^*_{YY})^{-1} (T)}}$$

153,78	160,67
72,00	72,00

$$MC_{pk} = MC_p / K$$

K Matrizenkalkül

K	1,0376	0,0767	K	1,0395	0,0805

$$K = \sqrt{1 + \left|\bar{Y} - Soll\right|^T (\Sigma^*_{YY})^{-1} \left|\bar{Y} - Soll\right|}$$

Berechnung Diagrammdaten

Winkel Θ und Hauptachsen der Streuungsellipsen

über die Eigenwerte λ der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \lambda(s_1^2 + s_2^2) + (s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2) = 0$

Sp(S_{YY})	938,89	Spur der Kovarianzmatrix
det(S_{YY})	#######	Determinante der Kovarianzmatrix

Θ	λ_1	λ_2
0,0000	469,44	469,44
Halbachsen	L_{10}	L_{20}
	64,9995	64,9995

Lösungen der quadratischen Gleichung

	485,00	
	56440	
	-1	
Θ	λ_1	λ_2
0,1490	193,86	291,14
	L_{1GG}	L_{2GG}
	41,7694	51,1884

	493,36	
	57191	
	-1	
Θ	λ_1	λ_2
0,2146	186,19	307,17
	L_1	L_2
	40,9351	52,5781

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left[2\rho\sigma_x\sigma_y / (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\right]$$

$$L_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}\chi^2_{1-\alpha,m}}$$

$$\theta = 1/2 \arctan\left[2\rho\sigma^2\right]$$

Im Falle gleicher Varianzen