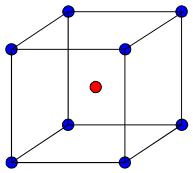
2K-VOLLFAKTORIELLE VERSUCHSPLÄNE (FULL FACTORIALS)



Lernziele

Sie kennen die **Nomenklatur** für 2k-faktorielle Versuche (Versuchsdesigns mit zwei Faktorstufen).

Sie können in Minitab 2k-vollfaktorielle **Designs** erstellen.

Sie kennen die Schritte bei der **Auswertung** eines 2k-Experimentes.

Sie können in Minitab 2k-vollfaktorielle Versuche **auswerten**, die **Modellannahmen verifizieren** und die **Ergebnisse interpretieren**.

Sie wissen, worauf Sie bei der Analyse der Experimente **achten müssen**.

Sie kennen das Konzept des **Center Points**.

Sie können **Designs** mit Center Points erstellen und auswerten.

2^k-vollfaktorielle Versuche

Nomenklatur vollfaktorieller Versuche auf 2 Stufen

2 → Anzahl der Stufen jedes Faktors

k → Anzahl der Faktoren

2^k → Anzahl der Kombinationen für einen vollständigen Versuchsplan

Beispiel: Ein 2^4-vollfaktorieller Versuch untersucht vier Faktoren mit je zwei Stufen. Das Experiment wird in 2 * 2 * 2 * 2 oder 16 Teilversuchen durchgeführt.

Bezeichnung der Faktorstufen

Faktorstufen werden kodiert dargestellt, wobei "**-1**" die untere (**minus-Einstellung**) und "**+1**" die obere Stufe (**plus-Einstellung**) darstellt.

Vorteile der 2k-faktoriellen Versuche

erfordern **weniger Teilversuche** (runs) pro Faktor als mehrstufige Designs

Eignen sich gut für **sequenzielle Studien,** können **Ausgangspunkt** für komplexere Designs sein (Experimentieren ist ein sequenzieller Prozess!)

Können bereits im **Anfangsstadium der Prozessverbesserung** eingesetzt werden (Untersuchung möglichst vieler Faktoren, aber nur 2 Stufen je Faktor).

Schema vollfaktorieller Versuchspläne

2**2 / 2*2 Design

2**3 / 2*2*2 Design

2**4 / 2*2*2*2 Design

A	B	C	D
-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1
-1	1	1	-1
1	1	1	-1
-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1
-1	1	-1	1
1	1	-1	1
-1	-1	1	1
1	-1	1	1
-1	1	1	1
1	1	1	1

codierte Designs

Versuchsplans mit Wechselwirkungsmuster

3 Faktoren auf je 2 Stufen
2^3 = 8 mögliche Kombinationen vollfaktoriell
3 Haupteffekte, 3 Zweifach-Wechselwirkungen, 1 Dreifach-Wechselwirkung

A	B	C	A*B	A*C	B*C	A*B*C
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Designerzeugung in Minitab

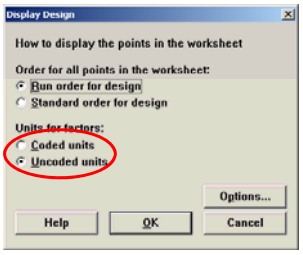
Wir wollen das Design für einen **2^3 vollfaktoriellen Versuch** in Minitab erzeugen.

Die Faktoren und Faktorstufen sind:

- Temperatur [°C]: 160 (-1) und 180 (+1)
- Konzentration [%]: 20 (-1) und 40 (+1)
- Katalysator: A (-1) und B (+1)

Stat > DOE > Factorial > Create Factorial Design...

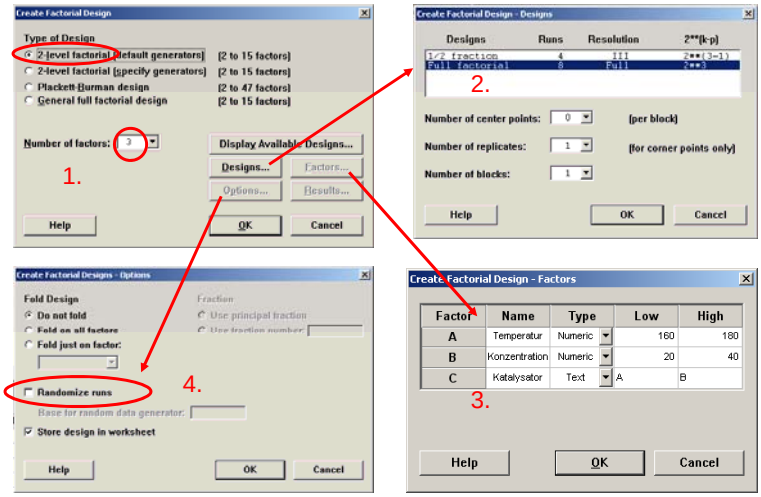
Zunächst erstellen wir das **Design mit den codierten Faktorstufen** (-1 und +1).



Hinweis:
Die Anzeige kann zwischen codierten und uncodierten Faktoren gewechselt werden

Stat > DOE > Display Design...

Vorgehensweise



Versuchsplan aus Minitab

Die Spalten **C5-C7** stellen die **Parameterstufen** dar, die für jeden Versuch (Zeilen 1-8) gefahren werden.
Die Spalten **C1-C4** sind **Systeminfos** für die Auswertung von Versuchsplänen.

Worksheet 1 ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Temp	Konz	Kat	Temp*Konz	Temp*Kat	Konz* Kat	T*Konz*Kat
1	1	1	1	1	-1	-1	-1				
2	2	2	1	1	1	-1	-1				
3	3	3	1	1	-1	1	-1				
4	4	4	1	1	1	1	-1				
5	5	5	1	1	-1	-1	1				
6	6	6	1	1	1	-1	1				
7	7	7	1	1	-1	1	1				
8	8	8	1	1	1	1	1				

Übung: Erzeugen Sie nun die Wechselwirkungsmuster durch entsprechende Multiplikation der Spalten mit dem Calculator in den Spalten C8-C11.

Calc > Calculator...

Überprüfung des Designs

Versuchsplan mit Wechselwirkungsmuster

Worksheet 1 ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Temp	Konz	Kat	Temp*Konz	Temp*Kat	Konz* Kat	T*Konz*Kat
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	2	2	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	3	3	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	4	4	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
5	5	5	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
6	6	6	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	7	7	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
8	8	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Wir überprüfen das Design hinsichtlich einer möglichen Korrelation der Inputfaktoren.

Stat > Basic Statistics > Correlation...

Haben Sie eine Erwartung / Vermutung hinsichtlich der Korrelation der Inputs?

?

Überprüfung des Designs

Correlations: Temp; Konz; Kat; Temp*Konz; Temp*Kat; Konz* Kat; T*Konz*Kat

	Temp	Konz	Kat	Te*Ko	Te*Kat	Ko*Kat
Konz	0,000 1,000					
Kat	0,000 1,000	0,000 1,000				
Temp*Konz	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000			
Temp*Kat	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000		
Konz* Kat	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	
T*Konz*Kat	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000	0,000 1,000

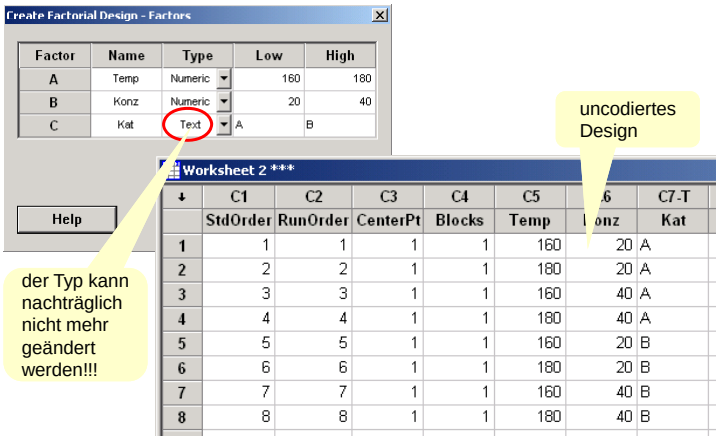
Alle Korrelationskoeffizienten sind 0, alle p-Werte 1. Die **Haupteffekte und Wechselwirkungen** lassen sich **völlig unabhängig** voneinander analysieren.

Das ist die wesentliche Eigenschaft von faktoriellen Versuchsplänen/orthogonalen Feldern.

Erstellung des uncodierten Designs

Jetzt erstellen wird das Design mit den **tatsächlichen** Faktorstufen.

Stat > DOE > Create factorial design... > Factors



Factor	Name	Type	Low	High
A	Temp	Numeric	160	180
B	Konz	Numeric	20	40
C	Kat	Text	A	B

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7-T
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Temp	Konz	Kat
1	1	1	1	1	160	20	A
2	2	2	1	1	180	20	A
3	3	3	1	1	160	40	A
4	4	4	1	1	180	40	A
5	5	5	1	1	160	20	B
6	6	6	1	1	180	20	B
7	7	7	1	1	160	40	B
8	8	8	1	1	180	40	B

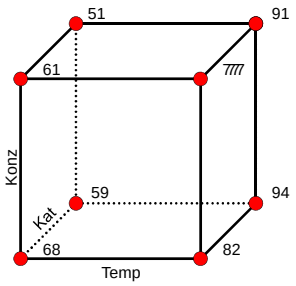
Beispiel eines vollständigen Versuchs 2^3

In der Datei **Ausbeute3.mtw** finden Sie die Ergebnisse eines Experiments mit **zwei quantitativen** (Temp / Konz) und **einem qualitativen** Inputfaktor (Kat).
Die Faktorstufen sind:

- Temperatur [°C]: 160 (-1) und 180° C (+1)
- Konzentration [%]: 20 (-1) und 40 (+1)
- Katalysator: A (-1) und Kat B (+1)

AUSBEUTE3.MTW ***

	C5	C6	C7	C8
	Temp	Konz	Kat	Ausbeute
1	-1	-1	-1	68
2	1	-1	-1	82
3	-1	1	-1	61
4	1	1	-1	77
5	-1	-1	1	59
6	1	-1	1	94
7	-1	1	1	51
8	1	1	1	91



Berechnung der Haupteffekte

Berechnen der Mittelwerte xq (+) und xq (-) für jeden Faktor.
Die Differenz von xq (+) und xq (-) ergibt den Effekt des betreffenden Faktors.

Für den Faktor Konzentration berechnet sich der Effekt wie folgt:

$$xq(-) = \frac{(68+82+59+94)}{4} = 75{,}75$$

$$xq(+) = \frac{(61+77+51+91)}{4} = 70$$

$$xq(+) - xq(-) = 70{,}00 - 75{,}75 = -5{,}75$$

AUSBEUTE3.MTW ***

↓	C5	C6	C7	C8
	Temp	Konz	Kat	Ausbeute
1	-1	-1	-1	68
2	1	-1	-1	82
3	-1	1	-1	61
4	1	1	-1	77
5	-1	-1	1	59
6	1	-1	1	94
7	-1	1	1	51
8	1	1	1	91

Interpretation
Wenn die Konzentration von 20% (minus-Position) auf 40% (plus-Position) erhöht wird, so sinkt die Ausbeute im Durchschnitt um -5,75 Einheiten.

Effekte der Haupt- und Wechselwirkungen

Temp(T)	Konzentr(C)	Kat(K)	T*C	T*K	C*K	T*C*K	Ausbeute
-1	-1	-1	1	1	1	-1	68
1	-1	-1	-1	-1	1	1	82
-1	1	-1	-1	1	-1	1	61
1	1	-1	1	-1	-1	-1	77
-1	-1	1	1	-1	-1	1	59
1	-1	1	-1	1	-1	-1	94
-1	1	1	-1	-1	1	-1	51
1	1	1	1	1	1	1	91

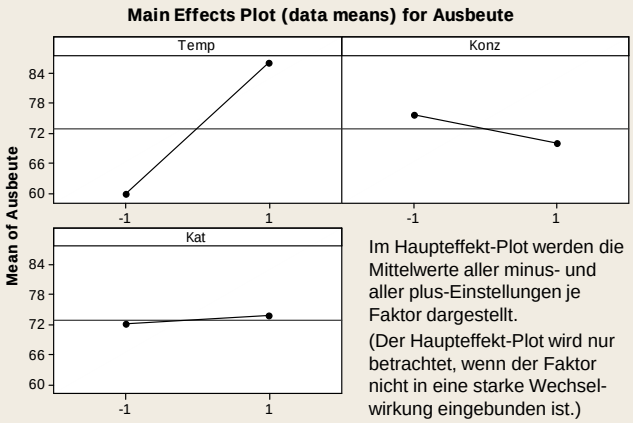
Temp	Konz	Kat	T*C	T*K	C*K	T*C*K	
86,00	70,00	73,75	73,75	78,50	73,00	73,25	xq (+)
59,75	75,75	72,00	72,00	67,25	72,75	72,50	xq (-)
26,25	-5,75	1,75	1,75	11,25	0,25	0,75	Effekt

Interpretieren Sie die Effekte der Hauptfaktoren und Wechselwirkungen!

Effekt = xq (+) – xq (-)

Darstellung von Haupteffekten

Stat > ANOVA > Main Effects Plot...

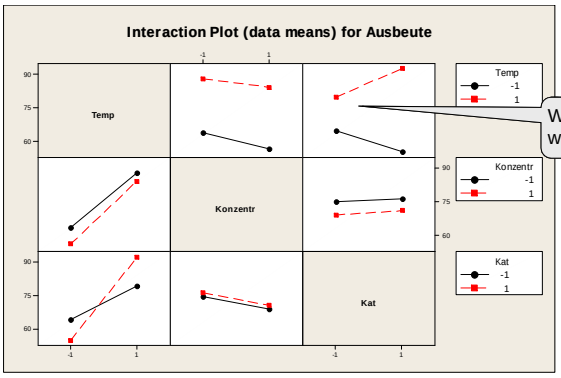


Im Haupteffekt-Plot werden die Mittelwerte aller minus- und aller plus-Einstellungen je Faktor dargestellt.

(Der Haupteffekt-Plot wird nur betrachtet, wenn der Faktor nicht in eine starke Wechselwirkung eingebunden ist.)

Darstellung von Wechselwirkungen

Stat > ANOVA > Interactions Plot... > Display full interaction plot matrix



Wechsel-wirkung

Im Wechselwirkungs-Plot werden die Mittelwerte aller minus- und plus-Einstellungen des einen Faktors in Abhängigkeit der Einstellung eines weiteren Faktors dargestellt.

Der Grad der **"Nichtparallelität"** der Geraden ist ein Indikator für die **"Stärke"** der **Wechselwirkung**. Verlaufen die Geraden parallel, so besteht keine Wechselwirkung.

Analyse des Experimentes mit Minitab

Nehmen wir an, wir haben mit dem eben erstellten Design einen Versuch durchgeführt.

Datei: **Ausbeute3.mtw**

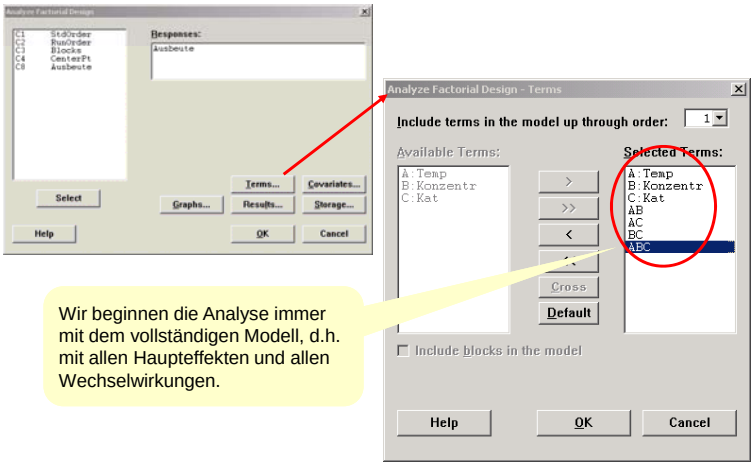
Ziel des Experimentes ist es, eine möglichst **hohe Ausbeute** zu erreichen.

Wir wollen untersuchen, welche **Faktoren** einen **signifikanten Einfluss** auf das Ergebnis haben und wie wir die Faktoren optimal einstellen können.

Wir werden jetzt die einzelnen Schritte zur Analyse eines DoE sukzessive durchführen.

vollständiges Modell

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design... > Terms...



Wir beginnen die Analyse immer mit dem vollständigen Modell, d.h. mit allen Haupteffekten und allen Wechselwirkungen.

Session Window

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design...

```
Estimated Effects and Coefficients for Ausbeute (coded units)

Term                Effect      Coef
Constant                      72,875
Temp                26,250    13,125
Konzentr            -5,750    -2,875
Kat                  1,750     0,875
Temp*Konzentr        1,750     0,875
Temp*Kat            11,250     5,625
Konzentr*Kat         0,250     0,125
Temp*Konzentr*Kat    0,750     0,375

Analysis of Variance for Ausbeute (coded units)

Source                DF      Seq SS     Adj SS     Adj MS      F      P
Main Effects           3     1450,37    1450,37    483,458      *      *
2-Way Interactions     3      259,38     259,38     86,458      *      *
3-Way Interactions     1        1,13       1,13      1,125      *      *
Residual Error         0        0,00       0,00      0,000
Total                  7     1710,87
```


Kommentare zum Session Window

Die Spalte "**Effect**" zeigt den Haupt- oder Wechselwirkungs-Effekt, wie wir ihn schon berechnet haben.

Die Spalte "**Coef** " zeigt die Hälfte dieser Effekte oder die **Koeffizienten** (b_n) des mathematischen Modells.

Der **F-Wert kann nicht berechnet werden**, weil es nur **einen Messwert pro Zelle** gibt (keine "within group" Variation). Für den Error-Term verbleiben 0 Freiheitsgrade. Das ist immer so, wenn wir **keine Versuchswiederholungen** (oder Center Points, siehe später) haben.

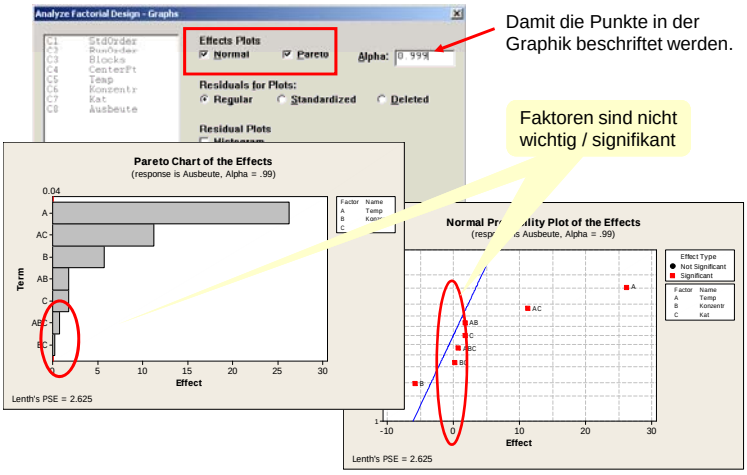
Wir müssen also einen oder mehrere Terme aus dem Modell entfernen. Da wir nur nicht signifikante Terme entfernen wollen, nehmen wir Terme mit einem kleinen Effekt.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, um diese Entscheidung zu treffen:

- Normality Plot der Effekte
- Pareto Plot der Effekte

Normality Plot und Pareto Plot der Effekte

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design... > Graphs



Damit die Punkte in der Graphik beschriftet werden.

Faktoren sind nicht wichtig / signifikant

Kommentar zum Normalverteilungs-Plot

Wenn wir von der **Hypothese** ausgehen, dass die **Änderungen der Faktoren keinerlei Einfluss auf den Response** haben, und auch **keine Wechselwirkung** existieren, dann erwarten wir eine **zufällige Verteilung** der Output-Variablen um einen konstanten Mittelwert.

Für die berechneten Effekte erwarten wir daher eine **Normalverteilung** um den Mittelwert 0.

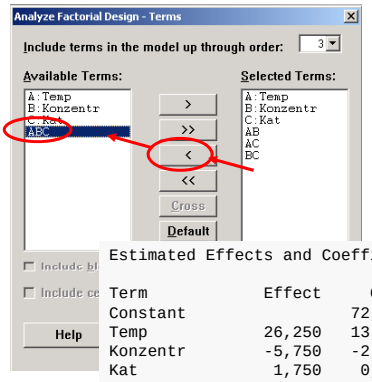
Diejenigen Effekte, die in einem Normalverteilungs-Plot von der geraden Linie abweichen, sind demnach wahrscheinlich **keine zufälligen Ereignisse,** sondern weisen auf einen **statistisch signifikanten Unterschied** hin.

In unserem Beispiel sind das die **Effekte** von **A (Temp)** und die **Wechselwirkung A*C (Temp* Kat)**.

Vereinfachung des Modells

Wir entfernen die **3-fach WW A*B*C** aus dem Model:

Stat > DOE > Factorial > Analyze factorial design ….



Damit erhalten wir jetzt p-Werte für die einzelnen Effekte.

Wir vereinfachen unser Modell jetzt sukzessive indem wir jeweils den Faktor mit dem höchsten p-Wert aus dem Modell herausnehmen.

Das führen wir fort bis nur noch signifikante Faktoren im Modell vorhanden sind.

Estimated Effects and Coefficients for Ausbeute (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		72,875	0,3750	194,33	0,003
Temp	26,250	13,125	0,3750	35,00	0,018
Konzentr	-5,750	-2,875	0,3750	-7,67	0,083
Kat	1,750	0,875	0,3750	2,33	0,258
Temp*Konzentr	1,750	0,875	0,3750	2,33	0,258
Temp*Kat	11,250	5,625	0,3750	15,00	0,042
Konzentr*Kat	0,250	0,125	0,3750	0,33	0,795

Vereinfachtes Modell

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		72,875	0,5543	131,46	0,000
Temp	26,250	13,125	0,5543	23,68	0,000
Konzentr	-5,750	-2,875	0,5543	-5,19	0,014
Kat	1,750	0,875	0,5543	1,58	0,213
Temp*Kat	11,250	5,625	0,5543	10,15	0,002

S = 1,56791 R-Sq = 99,57% R-Sq(adj) = 98,99%

Analysis of Variance for Ausbeute (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	3	1450,37	1450,37	483,458	196,66	0,001
2-Way Interactions	1	253,13	253,13	253,125	102,97	0,002
Residual Error	3	7,38	7,38	2,458		
Total	7	1710,88				

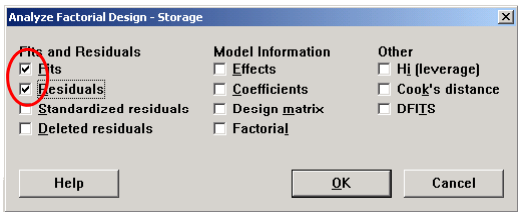
Durch die Vereinfachung des Modells sind drei Freiheitsgrade für den Error Term verfügbar geworden.

Wir erhalten das folgende **endgültige Modell**.
(Kat kann nicht entfernt werden da die Wechselwirkung Temp*Kat **signifikant** ist.)

Diagnostik der Residuen

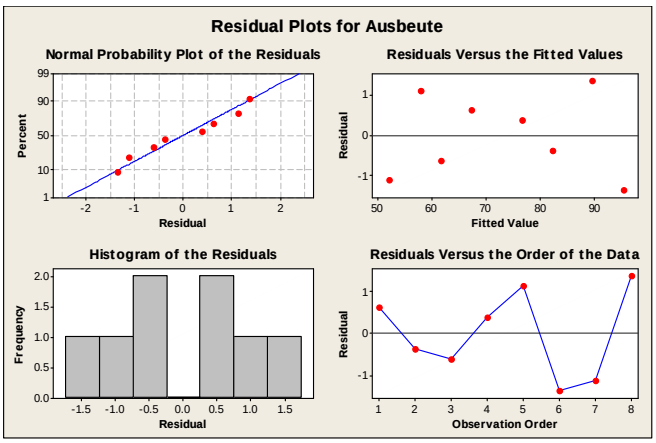
Nun müssen wir die **Residuendiagnose** durchführen.
Dazu rechnen wir erneut unser Modell, speichern jedoch unter der Option "Storage" Fits und Residuen ab und erstellen den Residuen-Plot.

- **Stat > DoE > Factorial > Analyze Factorial Design > Graph > ⊙ Four in one**
- **Stat > DoE > Factorial > Analyze Factorial Design > Storage > ☒ Fits**
  ☒ Residuals



Diagnostik der Residuen

- **Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design > Graph > ⊙ Four in one**



Hinweis: Der Residual Plot wir immer auf Basis des aktuellen Modells erstellt!

Ergebnisinterpretation

Die Ergebnisinterpretation erfolgt zunächst graphisch.

Bei **signifikanten Wechselwirkungen** verwenden wir den **Wechselwirkungsplots** (Interaction Plot).

Die Wechselwirkungsplots untersuchen wir unter 2 Gesichtspunkten:

- Welches sind die optimalen Einstellungen?
- Gibt es robuste Prozesseinstellungen?

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots > Interaction Plot...
(oder: **Stat > ANOVA > Interactions Plot…**)

Bei **signifikanten Haupteffekten** verwenden wir den **Haupteffektplot** (Main effect Plot).

- Die Haupteffektplots untersuchen wir unter dem Gesichtspunkt: was sind die optimalen Einstellungen
- Als weitere Möglichkeit können Sie den Cube Pot darstellen

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots > Main Effects Plot...
(oder: **Stat > ANOVA > Main Effects Plot…**)

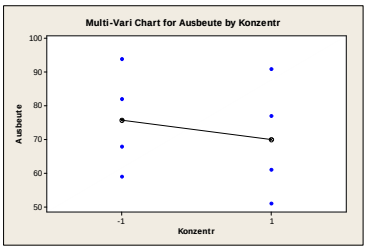
Signifikante Haupt- und Wechselwirkungen

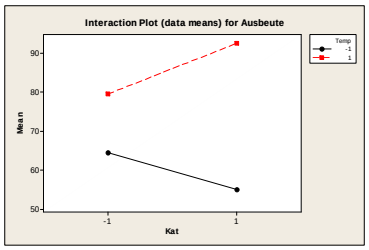
Signifikante Parameter

Die Haupteffekte von Temperatur und Konzentration sowie die Wechselwirkung zwischen Temperatur und Katalysator sind signifikant.
Da die Temperatur in eine signifikante Wechselwirkung eingebunden ist, betrachten wir nicht den Haupteffekt-, sondern nur den Wechselwirkungsplot.

Das beste Ergebnis erhalten wir mit folgender Einstellung:

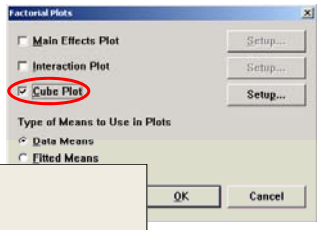
- Temperatur: 180° (+1)
- Konzentration: 20% (-1)
- Katalysator: Kat B (+1)

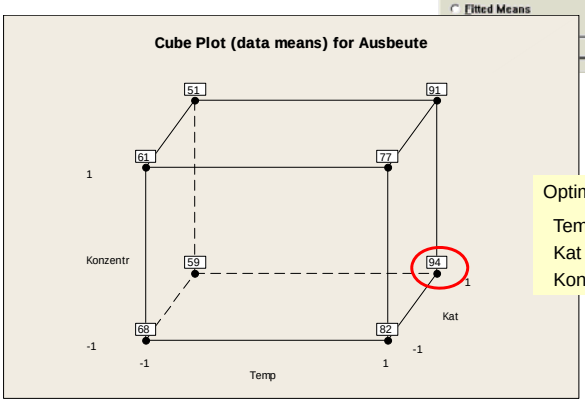




Cube Plot

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots...> Cube Plot





Optimale Einstellung:

Temp	→	+ 1
Kat	→	+ 1
Konz	→	- 1

Mathematisches Modell

Das allgemeine Modell für ein 3 Faktoren-Experiment lautet:

$$Y_p = \overline{Y} + b_1 T + b_2 Ko + b_3 Kat + b_4 (T * Ko) + b_5 (T * Kat) + b_6 (Ko * Kat) + b_7 (T * Ko * Kat)$$

$\overline{Y}$ ist der **Mittelwert** aller Ausbeuten über alle Versuche und die b_n Werte (Koeffizienten) sind die halben Effekte (Effekt / 2) für jeden Faktor oder Wechselwirkung.

Aufgabe

Bestimmen Sie das mathematische Modell für die Ausbeute in unserem Experiment.

Welche Ausbeute prognostizieren Sie ....

a) für die optimale Einstellung?

b) wenn alle Faktoren auf +1 stehen?

c) wenn alle Faktoren auf 0 stehen?

Ergebnisprognose für den Mittelwert

Den **Prognosewert** für die beste Einstellung können wir ....

- aus den **Plots** ablesen (aber ggf. nicht ganz einfach).
- aus den **Fits** im Worksheet ablesen.
- berechnen aus der **Gleichung** des mathematischen Modells.

Für unser Beispiel ergibt sich ein **Vorhersagewert** von:

Ausbeute = 72,875 + 13 ,125 * Temp + 0,875*Kat - 2,875 * Konz + 5,625 * Temp* Kat

Optimale Einstellungen: Temp = 1 Konz = -1 Kat = 1

Ausbeute: μ = 72,875 **+** 13,125 **+** 2,875 **+** 5,625 = 94,5

Alle Faktoren auf 1: Ausbeute = 88,75

Alle Faktoren auf 0: Ausbeute = 72,875

Aber: Hat der **Wert 0** eine Bedeutung für die Variable Katalysator?

Ergebnisprognose für die Streuung (x_{quer}-Werte)

Die Streuung, die wir prognostizieren, wird durch alle nicht-signifikanten Effekte verursacht (Rauschen).
Alle diese "Effekte" finden wir im Error Term unserer **ANOVA-Tafel**.

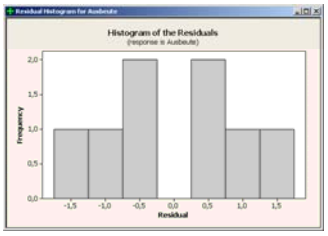
```
Analysis of Variance for Ausbeute (coded units)

Source                DF    Seq SS    Adj SS    Adj MS       F      P
Main Effects           3   1450,37   1450,37   483,458  196,66  0,001
2-Way Interactions     1    253,13    253,13   253,125  102,97  0,002
Residual Error         3      7,38      7,38     2,458
Total                  7   1710,87
```

Wenn die Varianzen homogen sind, berechnen wir Sigma aus Wurzel (Adj MS) der Zeile "Residual Error".

σ = Wurzel(2,458) = 1,567

Weitere Möglichkeit:

→ Abschätzung aus dem Histogramm der Residuen



praktische Signifikanz: ε-square

Der **relative Effekt** eines Faktors oder einer Wechselwirkung ist definiert als die Summe der Quadrate des Faktors (oder der Wechselwirkung) dividiert durch die gesamte Summe der Quadrate. Der Wert wird in Prozent ausgedrückt.

$$\%(\text{Faktor}) = \frac{SS_{Faktor}}{SS_{gesamt}} * 100\%$$

→ Für signifikante Faktoren stellen wir diesen Wert im Pie-Chart dar.

Zur Ermittlung der praktischen Signifikanz der **einzelnen Faktoren** benutzen wir die Sums of Squares aus der **ANOVA-Tafel**.

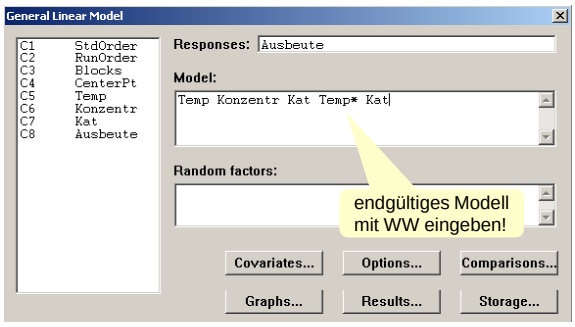
Dazu müssen wir unser endgültiges Modell nochmals unter dem ANOVA-Menu durchrechnen (da die DoE-Analyse nur die SS der zusammengefassten WW's zeigt).

Stat > ANOVA > General Linear Modell... oder **Balanced ANOVA*...**

* Die Balanced ANOVA kann immer verwendet werden, wenn für jede Einstellkombination die gleiche Anzahl von Messwerten vorliegt.

praktische Signifikanz: ε-square

Stat > ANOVA > General Linear Model ....



Achtung! Dieses Vorgehen funktioniert nur, wenn keine Center Points vorhanden sind und keine Abweichungen der der Faktorstufen vorliegen.
Ansonsten kann das Pie Chart über die Sums of Squares der Haupteffekte, der
2-Way Interaction und des Residual Errors erstellt werden.

praktische Signifikanz: ε-square

Jetzt kopieren wir einen Teil der ANOVA-Tafel in das Worksheet und erstellen unsere **Pie Chart.**

Analysis of Variance for Ausbeute

Source	DF	SS	MS	F	P
Temp	1	1378,13	1378,13	560,59	0,000
Konz	1	66,13	66,13	26,90	0,014
Kat	1	6,13	6,13	2,49	0,213
Temp*Kat	1	253,13	253,13	102,97	0,002
Error	3	7,38	2,46		
Total	7	1710,88			

Alt-Taste und rechte Maustaste gleichzeitig drücken und Bereich markieren.

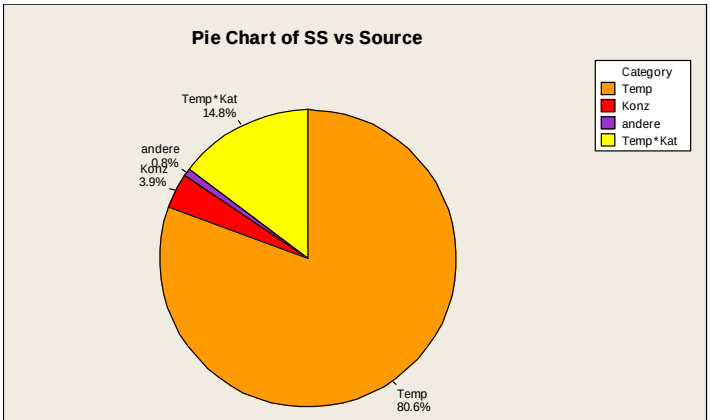
Error-Term und nicht-signifikanten Faktor Kat in "andere" umbenennen

AUSBEUTE3.MTW ***

↓	C12-T	C13	C14
	Source	DF	SS
1	Temp	1	1378.13
2	Konz	1	66.13
3	andere	1	6.13
4	Temp*Kat	1	253.13
5	andere	3	7.38

Pie Chart der relativen Effekte

Graph > Pie Chart... > ⦿ Chart values from a table



?

Wie Interpretieren Sie das Pie Chart ??

Schlussfolgerungen

Temperatur, **Konzentration** und die Wechselwirkung
Temperatur*Katalysator zeigen einen statistisch signifikanten Einfluss auf die Ausbeute und erklären 99%
der Streuung in den Daten.

Innerhalb des untersuchten Bereiches der Faktorstufen erhalten wir die beste Ausbeute mit folgenden Einstellungen:

- Temperatur: 180° C (+1) → wichtigster Faktor
- Katalysator: Kat B (+1)
- Konzentration: auf 20% (-1) (nicht signifikant)

Die Vorhersage für diese Einstellung lautet:

- μ = 94,5
- σ = 1,6

Vorgehen bei 2k-Factorials (1)

1. **Design-Auswahl**

   Stellen Sie sicher, dass der Versuch **kontinuierliche Ergebnisgrößen** liefert, dass die **wichtigen Inputs** (Parameter und Störgrößen) im Versuchsplan enthalten sind und dass die gewählten Einstellungen zu **brauchbaren Ergebnissen** führen.

   Überlegen Sie, welchen standardisierten Effekt (**delta / sigma**) Sie mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (**power = 1- beta**) auf einem gegebenen Signifikanzniveau (**alpha**) als signifikant erkennen wollen und bestimmen Sie den benötigten Stichprobenumfang (**n**) resp. die **Anzahl Versuchwiederholungen**.

   Stat > Power & Sample size > 2-level-factorial design

2. **Design-Erstellung**

   Erstellen Sie den Versuchsplan für die relevanten Faktoren unter:

   Stat > DOE > Factorial > Create Factorial Design: ⦿ 2-level-factorial

3. **Durchführung des Experiments**

   Seien Sie nach Möglichkeit während des Experiments präsent und beobachten Sie die Versuchsdurchführung und notieren Sie alle ungewöhnlichen Vorkommnisse (Logbuch).

Vorgehen bei 2k-Factorials (2)

4. **Analyse des vollständigen Modells**

   Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design...

   Wenn Sie alle Terme ins Modell aufnehmen, nur ein Messwert pro Teilversuch vor-liegt und keine Center Points im Design enthalten sind, bekommen Sie keine p-Werte, da kein Freiheitsgrad für den Error-Term übrig bleibt.

   Anhand des Pareto-Diagramms der Effekte (unter Option "Graphs" → "Pareto„) wird abgeschätzt, welche Faktoren aufgrund des geringen Effekts kaum signifikant resp. für die Praxis nicht relevant sind. Wenn mehrere Effekte nahe bei Null liegen, können diese gemeinsam aus dem Modell entfernt werden.

5. **Vereinfachung des Modells**

   Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design... → Terms

   Entfernen Sie nach und nach alle nicht signifikanten Terme aus dem Modell.

   Gehen Sie dabei sukzessive vor und entfernen Sie schrittweise immer den Effekt mit dem höchsten p-Wert, solange bis alle Effekte signifikant sind oder wegen der Hierarchie im Modell bleiben müssen.

   Terme mit einem p-Wert > 5% können gemeinsam aus dem Modell entfernt werden.

Vorgehen bei 2k-Factorials (3)

6. **Modelldiagnose**

   Rechnen Sie das endgültige Modell erneut, speichern Sie Fits (Prognosewerte) und Residuen, erstellen Sie den Residual-Plot und führen Sie die Modelldiagnose durch.

   Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design…

   → **Storage:** ☒ **Fits** ☒ **Residuals**

   → **Graph:** ⊙ **Four in one**

   Prüfen Sie, ob die Residuen normalverteilt sind, den Mittelwert 0 aufweisen, ob sie unabhängig sind und eine konstante Varianz haben.

7. **Identifizierung der optimalen Einstellung**

   Wenn **Wechselwirkungen** signifikant sind erstellen Sie Wechselwirkungsplots.

   Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots: ☒ **Interaction Plot**

   (**Stat > ANOVA > Interactions Plot...**)

   Untersuchen Sie, wo Sie die optimale Einstellung finden und ob robuste Prozess-einstellungen vorhanden sind.

Vorgehen bei 2k-Factorials (4)

7. Identifizierung der optimalen Einstellung *(Fortsetzung)*

Wenn **Haupteffekte** signifikant sind erstellen Sie Haupteffektplots.

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots: Main Effects Plot

(**Stat > ANOVA > Main Effects Plot....**)

Untersuchen Sie, wo Sie die **optimale Einstellung** finden. Wenn ein Haupteffekt auch in einer Wechselwirkung aktiv ist, stellen Sie nur den Wechselwirkungsplot dar.

Alternativ können Sie die optimale Einstellung auch aus den Fits ermitteln.

(Fits = auf Basis des mathematischen Modells ermittelte Prognosewerte)

Analyse der Streuung

Untersuchen Sie v.a. bei robusten Situationen bzw. für nicht-signifikante Inputs, ob es Einstellungen gibt, die hinsichtlich der Streuung vorzuziehen sind. Dazu müssen jedoch Messwiederholungen vorliegen.

Stat > ANOVA > Test for Equal Variances…

Vorgehen bei 2k-Factorials (5)

8. Ergebnisprognose

Ermitteln Sie die **optimale Vorhersage** aus den Fits oder dem **mathematischen Modell**.

Stellen Sie das auf. Achten Sie beim mathematische Modell auf die **unterschiedlichen Koeffizienten** für das codierte und das uncodierte Modell.

Verwenden Sie die ermittelte Standardabweichung (Wurzel (Adj MS) des Error Terms), um abzuschätzen, wie stark die Einzelwerte um den zu erwartenden Mittelwert schwanken (→ nur falls die Varianzen homogen sind).

9. Praktische Signifikanz

Zur Ermittlung der praktischen Signifikanz der jeweiligen Effekte rechnen wir mit dem endgültigen Modell nochmals die ANOVA:

Stat > ANOVA > General Linear Model...

Kopieren Sie die ANOVA-Tabelle (ohne die Zeile "Total") ins Worksheet und erstellen mit der Spalte Adj. SS das **Pie Chart**. Benennen Sie den Error-Term und nicht-signifikante Terme, die aus Gründen der Hierarchie nicht aus dem Modell entfernt werden konnten, in "andere" um.

(Achtung: bei Center Points und abweichenden Parameterstufen (sog. botched runs) funktioniert diese Vorgehensweise nicht).

Vorgehen bei 2k-Factorials (6)

10. **Praktische Signifikanz** (Fortsetzung)
    Alternative bei Designs mit C.P./botched runs:
    Pie Chart mit den "Adj SS" der Inputfaktoren und dem Residual Error erstellen
    (→ aus der ANOVA-Tafel, die als Teil der DoE-Auswertung ausgegeben wird) .

11. **Formulierung der Schlussfolgerungen und Empfehlungen**
    optimierte Faktoreinstellungen für den Prozess

12. **Bestätigungslauf und Implementierung der Einstellungen im Prozess**
    und / oder
    Planung des nächsten Experimentes

Übungsbeispiel

Analysieren Sie das Experiments entsprechend der beschriebenen Vorgehensweise.

UMWANDLUNGSRATE.MTW ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5-T	C6	C7	C8	C9
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Kat-Charge	Temp	Druck	Konzentration	Umwandlung
1	1	1	1	1	A	220	50	10	63.2
2	2	2	1	1	B	220	50	10	54.3
3	3	3	1	1	A	240	50	10	80.1
4	4	4	1	1	B	240	50	10	73.0
5	5	5	1	1	A	220	80	10	60.5
6	6	6	1	1	B	220	80	10	54.3
7	7	7	1	1	A	240	80	10	77.4
8	8	8	1	1	B	240	80	10	71.2
9	9	9	1	1	A	220	50	12	54.3
10	10	10	1	1	B	220	50	12	44.5
11	11	11	1	1	A	240	50	12	79.2
12	12	12	1	1	B	240	50	12	73.9
13	13	13	1	1	A	220	80	12	52.5
14	14	14	1	1	B	220	80	12	45.4
15	15	15	1	1	A	240	80	12	75.7
16	16	16	1	1	B	240	80	12	69.4

Tafel der Effekte und Koeffizienten

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design...

Estimated Effects and Coefficients for Umwandlu
(coded units)

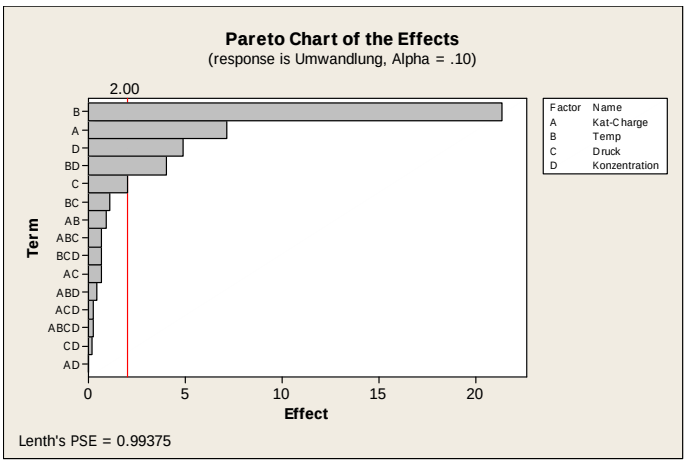
Term	Effect	Coef
Constant		64,306
Kat-Char	-7,112	-3,556
Temp	21,362	10,681
Druck	-2,012	-1,006
Konzentr	-4,887	-2,444
Kat-Char*Temp	0,888	0,444
Kat-Char*Druck	0,662	0,331
Kat-Char*Konzentr	-0,012	-0,006
Temp*Druck	-1,112	-0,556
Temp*Konzentr	4,013	2,006
Druck*Konzentr	-0,213	-0,106
Kat-Char*Temp*Druck	-0,688	-0,344
Kat-Char*Temp*Konzentr	0,437	0,219
Kat-Char*Druck*Konzentr	-0,237	-0,119
Temp*Druck*Konzentr	-0,663	-0,331
Kat-Char*Temp*Druck* Konzentr	-0,237	-0,119

Die 4-fach und 3-fach sowie einige 2-fach Wechselwirkungen sind nicht signifikant.

Wir vereinfachen unser Modell soweit wie möglich.

Pareto Chart der Effekte

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design... > Graphs... ☒ Pareto



signifikantes Modell

Factorial Fit: Umwandlung versus Kat-Charge; Temp; Druck; Konzentration

Estimated Effects and Coefficients for Umwandlung (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		64,306	0,3052	210,72	0,000
Kat-Charge	-7,112	-3,556	0,3052	-11,65	0,000
Temp	21,362	10,681	0,3052	35,00	0,000
Druck	-2,012	-1,006	0,3052	-3,30	0,008
Konzentration	-4,887	-2,444	0,3052	-8,01	0,000
Temp*Konzentration	4,013	2,006	0,3052	6,57	0,000

S = 1,22071 R-Sq = 99,33% R-Sq(adj) = 98,99%

Analysis of Variance for Umwandlung (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	4	2139,53	2139,53	534,882	358,95	0,000
2-Way Interactions	1	64,40	64,40	64,401	43,22	0,000
Residual Error	10	14,90	14,90	1,492		
Total	15	2218,83				

14,90 / 2218,83 =0,67%

Im Modell sind zwar nur noch signifikante Terme enthalten, dennoch muss es weiter vereinfacht werden, denn der **Error-Term muss mehr als 1% der SS(gesamt)** ausmachen resp. der **R-Sq < 99%** sein, da ansonsten die p-Werte zu klein werden.

Der Term mit dem höchsten p-Wert / dem kleinsten Effekt wird entfernt.

endgültiges Modell

Factorial Fit: Umwandlung versus Kat-Charge; Temp; Konzentration

Estimated Effects and Coefficients for Umwandlung (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		64,306	0,4204	152,97	0,000
Kat-Charge	-7,112	-3,556	0,4204	-8,46	0,000
Temp	21,362	10,681	0,4204	25,41	0,000
Konzentration	-4,887	-2,444	0,4204	-5,81	0,000
Temp*Konzentration	4,013	2,006	0,4204	4,77	0,001

S = 1,68150 R-Sq = 98,60% R-Sq(adj) = 98,09%

Analysis of Variance for Umwandlung (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	3	2123,33	2123,33	707,776	250,32	0,000
2-Way Interactions	1	64,40	64,40	64,401	22,78	0,001
Residual Error	11	31,10	31,10	2,827		
Lack of Fit	3	3,92	3,92	1,306	0,38	0,767
Pure Error	8	27,18	27,18	3,398		
Total	15	2218,83				

Lack of Fit-Test

```
Analysis of Variance for Umwandlung (coded units)
Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS       F      P
Main Effects         3  2123,33  2123,33  707,776  250,32  0,000
2-Way Interactions   1    64,40    64,40   64,401   22,78  0,001
Residual Error      11    31,10    31,10    2,827
  Lack of Fit        3     3,92     3,92    1,306    0,38  0,767
  Pure Error         8    27,18    27,18    3,398
Total               15  2218,83
```

Sobald **Messwiederholungen** vorliegen, kann ein zusätzlicher, der sog. **"Lack of Fit"-Tests** gemacht werden, mit dem überprüft wird, ob eine Fehlanpassung des Modells vorliegt.

Eine Fehlanpassung liegt vor, wenn wichtige Einflussgrößen nicht im Modell enthalten sind (oder versehentlich aus dem Modell entfernt wurden) und dadurch die Mittelwert-unterschiede in den Daten nicht durch die Parameter erklärt werden können.

Interpretation

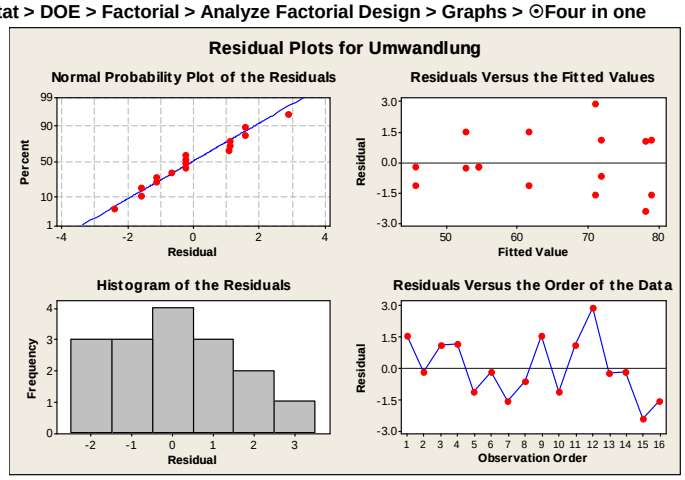
p-Wert > 0,05 → **H_0:** keine Fehlanpassung

p-Wert < 0,05 → **H_A:** Fehlanpassung des Modells

Der **reine Fehler** berechnet sich allein aus der Streuung der Wiederholmessungen.

Analyse der Residuen

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design > Graphs > ⊙Four in one

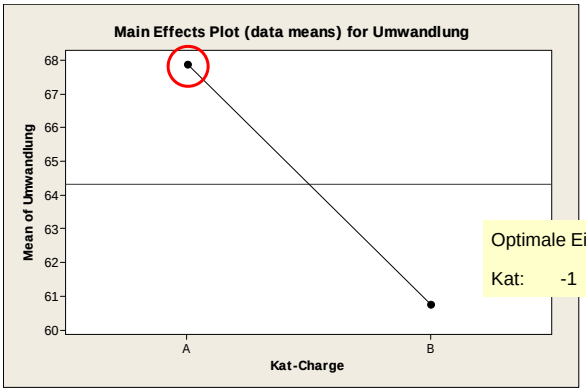


Residuendiagnostik: Keine besonderen Auffälligkeiten

Interpretation der signifikanten Effekte

Es werden aber nur die Haupteffekte von Faktoren dargestellt, die nicht in WW eingebunden sind. In unserem Beispiel ist dies der Faktor **Kat-Charge**

- **Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots... ☒ Main Effect Plot**
- **Stat > ANOVA > Main Effect Plot...**



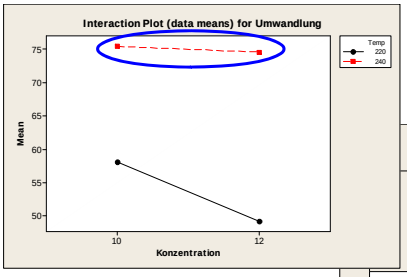
Optimale Einstellung:

Kat: -1 bzw. Kat A

Interpretation der Wechselwirkung

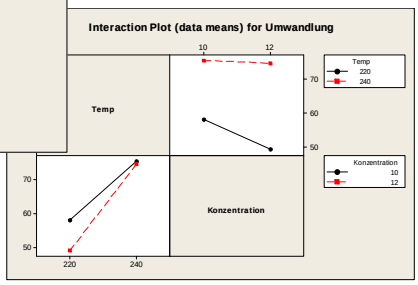
Interpretation zuerst für die Wechselwirkung höchster Ordnung vornehmen.
Die **Wechselwirkung Temperatur*Konzentration** (B*D) ist aktiv.

- **Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots... ☒ Interaction Plot**
- **Stat > ANOVA > Interactions Plot... > ☒ Display full interaction plot matrix**



Robuste Situation

Gibt es Unterschiede in der Streuung der Einstellungen?



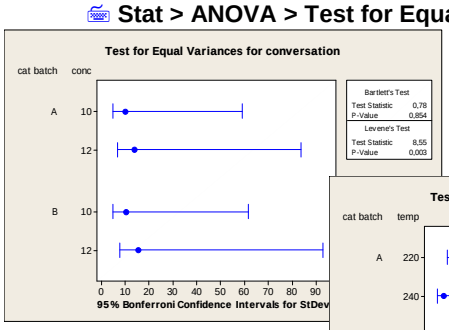
Optimale Einstellung:

Konz: -1 bzw. 10%

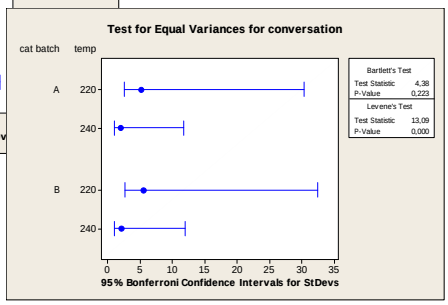
Temp: +1 bzw. 240°C

Vergleich der Streuungen

Stat > ANOVA > Test for Equal Variances



Es gibt signifikante Unterschiede bezüglich der Streuung (Interpretation des Levene's Test, da Stichprobenumfang < 10).



Die besten Einstellungen für den Mittelwert sind auch die besten Einstellungen bezüglich Streuung:

Konz: -1 / 10%

Temp: +1 / 240°

(Kat: -1 / A)

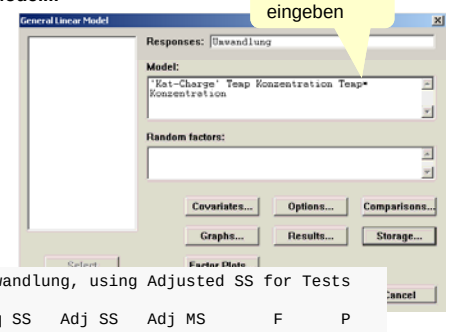
Praktische Signifikanz: ε-square

Stat > ANOVA > General Linear Model...

Response: Umwandlung

Faktoren: Kat-Charge
Temp
Konz.
Temp*Konz.

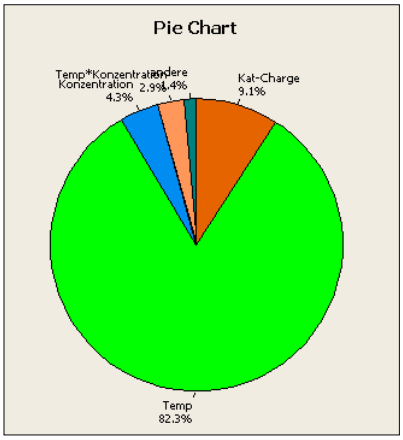
WW in Model eingeben




```
Analysis of Variance for Umwandlung, using Adjusted SS for Tests

Source              DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS       F      P
Kat-Charge           1   202,35   202,35   202,35   71,57  0,000
Temp                 1  1825,43  1825,43  1825,43  645,61  0,000
Konzentration        1    95,55    95,55    95,55   33,79  0,000
Temp*Konzentration   1    64,40    64,40    64,40   22,78  0,001
Error               11    31,10    31,10     2,83
Total               15  2218,83
```

Pie Chart

?



Graph > Pie Chart…
⊙ Chart values from a table
Categories → Source
Frequencies → SS

Frage:
Wie beurteilen Sie die praktische Relevanz der signifikanten Faktoren?

Mathematisches Modell: coded units

Die **Koeffizienten** (Spalte Coef) geben das **mathematisches Modell** an.

Factorial Fit: Umwandlung versus Kat-Charge; Temp; Konzentration

Estimated Effects and Coefficients for Umwandlung (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		64,306	0,4204	152,97	0,000
Kat-Charge	-7,112	-3,556	0,4204	-8,46	0,000
Temp	21,362	10,681	0,4204	25,41	0,000
Konzentration	-4,887	-2,444	0,4204	-5,81	0,000
Temp*Konzentration	4,013	2,006	0,4204	4,77	0,001

S = 1,68150 R-Sq = 98,60% R-Sq(adj) = 98,09%

Mathematisches Modell (codierte Einheiten)

y = 64,3 – 3,6*Kat-Charge + 10,7*Temp – 2,4*Konz + 2,0*Temp*Konz

s = 1,7

Da sich die Koeffizienten auf das codierte Modell beziehen, dürfen in die Gleichung nur die codierten Wertstufen -1 und +1 eingesetzt werden.

Mathematisches Modell: uncoded units

Die **Koeffizienten** (Spalte Coef) geben das **mathematisches Modell** an.

```
Estimated Coefficients for Umwandlung using data in uncoded units
Term                    Coef
Constant             353,100
Kat-Charge          -3,55625
Temp                -1,13875
Konzentration       -48,5875
Temp*Konzentration  0,200625
```

Koeffizienten für das uncodierte mathematisches Modell

y = 353,1 - 3,6*Kat-Charge - 1,1*Temp - 48,6*Konz + 0,2*Temp*Konz

ACHTUNG

Wenn Sie mit dem uncodierten Modell arbeiten müssen Sie darauf achten, dass die Inputfaktoren in etwa die gleiche Skalierung aufweisen, da das Modell ansonsten sehr unzuverlässig sein kann (insbesondere wenn WW im Modell enthalten sind).

anstatt:	Konzentration	0,002/0,004	[%]	→	2 /4	[x 10^{-3} %]
	Rührgeschw.	1500/1800	[rpm]	→	1,5/1,8	[x 10^{3} rpm]

Überprüfung mit Excel

Das mathematische Modell kann mit **codierten** und **uncodierten** Zahlen gerechnet werden (→ Achtung: Skalierung beachten).
Beim uncodierten Modell ist der Eingabebereich zwischen dem realen Minimum- und Maximum-Wert.
Bei codierten Werten ist der Eingabebereich zwischen -1 bis +1.
Attributive Werte müssen beim codierten und uncodierten Modell auf -1 bzw. +1 gesetzt werden.

Term	Coef codiert	Coef uncodiert	Wert codiert	Wert uncodiert	minus-Stufe	plus-Stufe
Constant	64,306	353,100				
Kat-Charge	-3,556	-3,556	-1	-1	A	B
Temp	10,681	-1,139	1	240	220	240
Konzentration	-2,444	-48,588	-1	10	10	12
Temp*Konzentration	2,006	0,201	1	240*10		
Ergebnis	**78,981**	**78,981**				

? Frage: Macht es überhaupt Sinn, die Katalysator-Charge als Term mit ins Modell aufzunehmen?

Steuergröße vs. Störgröße

Die Katalysator-Charge ist eine Störgröße und wurde ins Modell aufgenommen, damit die Einflüsse der anderen Faktoren besser beurteilt werden.
Da Störgrößen nicht auf eine bestimmte Stufe eingestellt werden können, macht es keinen Sinn, die Kat-Charge im mathematischen Modell zu berücksichtigen.
Für die Ergebnisprognose sollten Störgrößen aus dem Modell entfernt werden, um eine realitätsnahe Prognose für Mittelwert und Streuung zu erhalten.

Modell ohne die Störgrösse Kat-Charge

```
Term                Effect    Coef  SE Coef      T      P
Constant                    64,306    1,103  58,32  0,000
Temp                21,362  10,681    1,103   9,69  0,000
Konzentration       -4,887  -2,444    1,103  -2,22  0,047
Temp*Konzentration   4,013   2,006    1,103   1,82  0,094

S = 4,41071     PRESS = 415,027
R-Sq = 89,48%   R-Sq(pred) = 81,30%   R-Sq(adj) = 86,85%

Analysis of Variance for Umwandlung (coded units)
Source              DF   Seq SS   Adj SS  Adj MS      F      P
Main Effects         2  1920,98  1920,98  960,49  49,37  0,000
2-Way Interactions   1    64,40    64,40   64,40   3,31  0,094
Residual Error      12   233,45   233,45   19,45
  Pure Error        12   233,45   233,45   19,45
Total               15  2218,83
```


Hinweise zum Modell ohne Kat-Charge

Durch die Entfernung der Kat-Charge aus dem Modell wird der Fehlerterm entspre-chend grösser und die Wechselwirkung ist nicht mehr signifikant
(D.h. die ohne Berücksichtigung der Kat-Charge wäre die Wechselwirkung Temp*Konz im zusätzlichen Rauschen der Störgröße untergegangen).
Zudem kann der Lack of Fit-Test signifikant werden, da ein signifikanter Term aus dem Modell entfernt wurde.
(Im Beispiel wird kein Lack of Fit-Test mehr durchgeführt, wenn die Kat-Charge aus dem Modell genommen wird, bei der Entfernung der WW hingegen schon - ??)

- → **Beide Punkte sind für die Ergebnisprognose nicht von Bedeutung, da das korrekte Modell zuvor gerechnet und geprüft wurde (Residuendiagnostik).**
- → **Wichtig bei der Behandlung von Störgrößen, die als Faktoren berücksichtigt wurden, ist die Trennung zwischen Signifikanzbetrachtung und Prognose.**

Mathematisches Modell ohne Kat-Charge (codiert)

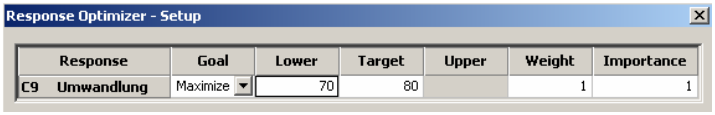
$$y = 64{,}3 + 10{,}7*Temp - 2{,}4*Konz + 2{,}0*Temp*Konz$$
$$s = 4{,}4$$

Ergebnisprognose mit Response Optimizer

Der Response Optimizer von Minitab stellt eine komfortablere und interaktive Möglichkeit zur Optimierung mehrerer Responses dar.

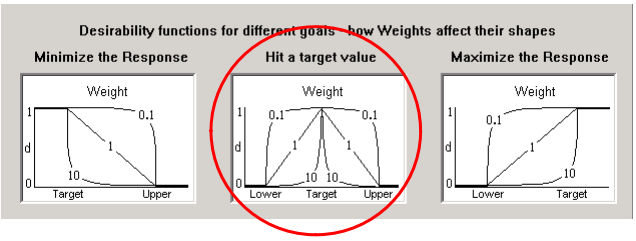
Stat > DOE > Factorial > Response Optimizer...

Dann müssen wir unter "Setup" für jeden Response die gewünschten Kriterien eingeben.



Responses	Goal	Lower / Target / Upper	Weight	Importance
Responses	Eingabe, ob - Ziel, - Min., - Max. erreicht werden soll	Eingabe der gewünschten Werte	Wie wichtig ist die Erreichung des Zielwertes (s. nächste Seite)	Gewichtung der Ergebnisse untereinander

Response Optimizer - Setup



Gewichtung

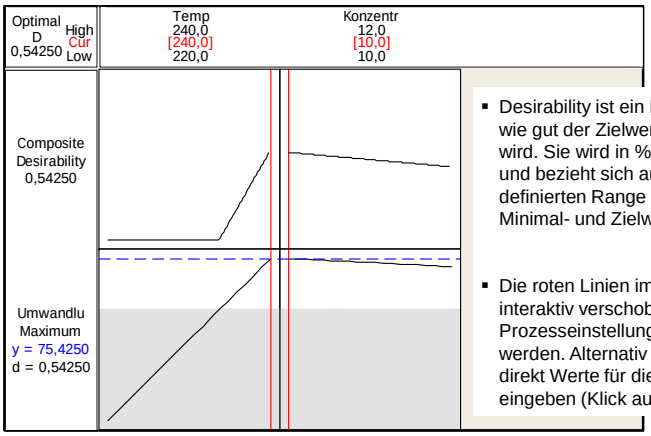
1 Die Bedeutung des Ergebnisses nimmt abweichend vom Zielwert linear ab.

0,1 Die Bedeutung des Ergebnisses bleibt über einen breiteren Bereich konstant (Plateau von akzeptablen Ergebnissen).

10 Der Zielwert muss exakt erreicht werden, geringe Abweichungen sind nicht zulässig oder führen zu Ausschuss.

Response Optimizer

Tools > Toolbars > OptiPlot →



- Desirability ist ein Mass dafür, wie gut der Zielwert erreicht wird. Sie wird in % angegeben und bezieht sich auf den zuvor definierten Range zwischen Minimal- und Zielwert (70-80).
- Die roten Linien im Plot können interaktiv verschoben und damit Prozesseinstellungen simuliert werden. Alternativ lassen sich direkt Werte für die Faktoren eingeben (Klick auf rote Zahl).

Schlussfolgerungen

Die **wichtigste Einflussgröße im Versuch ist die Temperatur**, gefolgt von der Kat-Charge, die jedoch nicht einstellbar ist, und von der Konzentration.

Das **beste Ergebnis** für die Umwandlung erzielt man mit **hoher Temperatur** und **niedriger Konzentration**.

beste Einstellungen:	Temperatur	240
	Konzentration	10

Mit dieser Einstellung ist man auch am robustesten gegenüber Schwankungen der Kat-Charge (vgl. Analyse der Streuung).

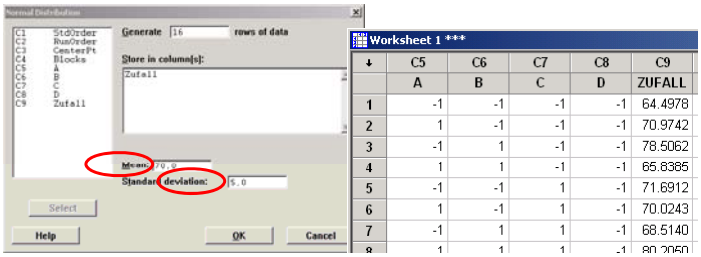
ÜBUNG

Bei der Versuchsdurchführung gibt es Differenzen zwischen den Soll- und Ist-Werten der Temperatur (sog. botched runs). Variieren Sie einige Temperaturen im Versuchs-plan und wiederholen Sie die Auswertung. Achten Sie auf Unterschiede.

Übung: Auswirkung von "No Effect"

In dieser Übung wollen wir **Zufallszahlen** als Response-Variable unseres vorherigen Experiments erzeugen. Wir definieren eine Spalte, die wir "Zufall" nennen und erzeugen **16 Zufallszahlen N (70 / 5)** in dieser Spalte.
In diesem Beispiel wird keiner der experimentellen Effekte aktiv sein.
Wie sieht die Verteilung der Effekte aus?

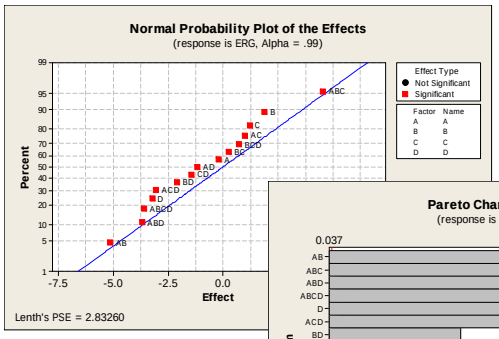
Calc > Random Data > Normal...



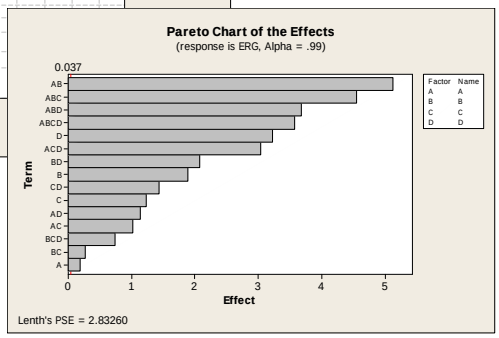
	C5	C6	C7	C8	C9
	A	B	C	D	ZUFALL
1	-1	-1	-1	-1	64.4978
2	1	-1	-1	-1	70.9742
3	-1	1	-1	-1	78.5062
4	1	1	-1	-1	65.8385
5	-1	-1	1	-1	71.6912
6	1	-1	1	-1	70.0243
7	-1	1	1	-1	68.5140
8	1	1	1	-1	80.2060

Stat > DOE > Factorial >Analyze Factorial Design > Graphs > ☒ Norm. Plot
☒ Pareto

Effects Plots



Alle Effekte liegen im Bereich von + / - 1s um den Mittelwert.



→ Es gibt keine klare Unterscheidung zwischen starken und schwachen Effekten – wir sehen nur Zufall.

Übung

Datei: **Teppich2.mtw**

Ziel: Bestimmen Sie die Effekte von
- Feuchtigkeit,
- Temperatur und
- Faltung

auf die Färbbarkeit von Kunststofffasern.

Output: Färbbarkeit (je höher je besser)

Inputs:
- Feuchtigkeit (trocken / feucht)
- Prozess-Temperatur (195 / 205)
- Faltung (tief / hoch)

Design: 2^3 mit zwei Replikationen (zwei Messwerte pro Versuchseinstellung)

Analysieren und berichten Sie!
Benutzen Sie die Schritt-für-Schritt-Vorgehensweise!

Konzept des Center Points

Nicht-Linearität bei Versuchen auf zwei Stufen

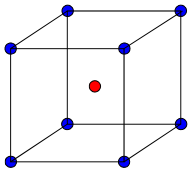
Wenn wir einen Faktor in nur zwei Stufen (Einstellungen) untersuchen, besteht die Gefahr, einen nicht-linearen Zusammenhang (Krümmung) zwischen Faktor und Response zu übersehen.

Mit der Hinzunahme eines sog. Center Points (C.P.) lässt sich mit wenig Zusatzauf- wand überprüfen, ob **alle Input-Faktoren einen linearen Einfluss** auf das Prozess-Ergebnis haben. Dies ist besonders im Anfangsstadium des Experimentierens relevant.

C.P. sind definiert als die **mittlere Einstellung** (-1 / 0 / +1)(codiert) aller Faktoren. Oft werden als Center Point. die **Standard-Prozesseinstellungen** genommen und davon ausgehend die plus- und minus-Einstellung definiert.

H_0: Alle Faktoren haben einen linearen Einfluss (Krümmung = 0 für alle Faktoren)

H_A: Mind. ein Faktor hat nicht-linearen Einfluss



Versuche auf 2 Stufen sollten wenn immer möglich mit Center Points durchgeführt werden.

Anzahl Messungen am Center Point

Empfohlene **Anzahl** Messungen am Center Point

Corner	Center Points	Anzahl Messungen
4	1	3
8	1	3 – 6
16	1	5 – 10
32	1	8 – 15

Die Center Points sind sehr wichtig für die Modelldiagnose. Deswegen muss dieser Punkt genau bestimmt werden. Die Genauigkeit wird mit steigender Anzahl Messpunkte verbessert.

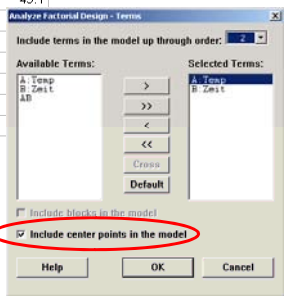
Beispiel: Versuch mit Center Points

Ausbeute4 mit C.P.mtw

AUSBEUTE4 MIT CP.MTW ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Temp	Zeit	Ausbeute
1	11	1	0	1	130	30	48.4
2	3	2	1	1	120	35	40.3
3	5	3	1	1	120	25	39.3
4	8	4	1	1	140	35	41.7
5	9	5	0	1	130	30	49.1
6	1	6	1	1	120	25	
7	10	7	0	1	130	30	
8	4	8	1	1	140	35	
9	7	9	1	1	120	35	
10	6	10	1	1	140	25	
11	2	11	1	1	140	25	
12							

Center Points werden mit 0 bezeichnet



Stat > DOE > Factorial
> Analyze Factorial Design...

Analyse mit Center Points

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design...

Factorial Fit: Ausbeute versus Temp; Zeit

```
Estimated Effects and Coefficients for Ausbeute (coded units)

Term       Effect     Coef  SE Coef       T      P
Constant           40,4375   0,1522  265,72  0,000
Temp       1,8250   0,9125   0,1522    6,00  0,001
Zeit       1,1750   0,5875   0,1522    3,86  0,008
Temp*Zeit  0,3250   0,1625   0,1522    1,07  0,327
Ct Pt               8,2292   0,2914   28,24  0,000

S = 0,430439   R-Sq = 99,30%   R-Sq(adj) = 98,83%
```

Da der **Center Point signifikant** ist, bedeutet dies, dass die Nullhypothese, **alle** getesteten Faktoren verhalten sich im untersuchten Bereich **linear**, nicht aufrecht gehalten werden kann.

→ Mindestens ein Faktor hat einen nicht-linearen Einfluss.

Die **WW Temp*Zeit** ist nicht signifikant und kann aus dem Modell entfernt werden.

Analyse mit Center Points

Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design...

Factorial Fit: Ausbeute versus Temp

```
Estimated Effects and Coefficients for Ausbeute (coded units)
Term      Effect     Coef  SE Coef       T      P
Constant          40,4375   0,2526  160,07  0,000
Temp      1,8250   0,9125   0,2526    3,61  0,007
Ct Pt              8,2292   0,4837   17,01  0,000
S = 0,714507    PRESS = 272,474
R-Sq = 97,42%   R-Sq(pred) = 0,00%   R-Sq(adj) = 96,78%
Analysis of Variance for Ausbeute (coded units)
Source          DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS       F      P
Main Effects     1    6,661    6,661    6,661   13,05  0,007
  Curvature      1  147,751  147,751  147,751  289,41  0,000
Residual Error   8    4,084    4,084    0,511
  Pure Error     8    4,084    4,084    0,511
Total           10  158,496
```

Curvature = Krümmung: Wenn der C.P. signifikant ist ist in der ANOVA-Tafel auch die Krümmung signifikant.

Mathematisches Modell mit Center Point

Term	Effect	Coef
Constant		40,4375
Temp	1,8250	0,9125
Ct Pt		8,2292

Die Koeffizienten beziehen sich auf das codierte Modell.

In die Gleichung wird -1 und +1 oder 0 (C.P.) eingesetzt.

Wird das System am **Center Point** betrieben, so entfällt der Koeffizient für den Inputfaktor Temperatur (C.P. = mittlere Einstellung (0) aller Inputfaktoren).

→ Das mathematische Modell lautet : **y = 40,4 + 8,2**

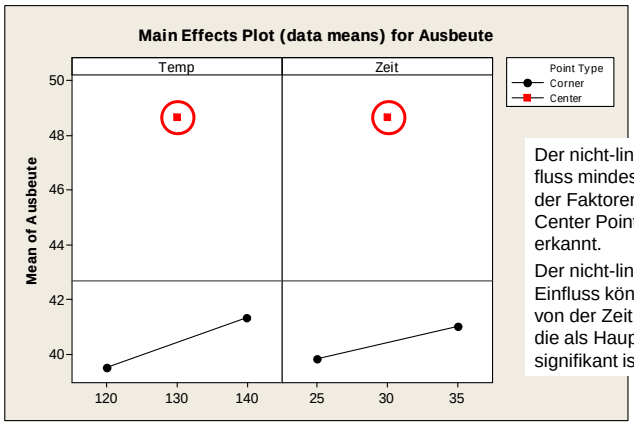
Interpretation Der Center Point erhöht die Ausbeute gegenüber dem Mittelwert der faktoriellen Punkten um 8,2 Einheiten.

Wird das System an den **Corner Point** betrieben, so entfällt der Koeffizient für den Center Point (Einstellung der Faktoren: -1 oder +1).

→ Das mathematische Modell lautet : **y = 40,4 + 0,91 Temp**

Die zu erwartende Standardabweichung der Prognose beträgt: **s = 0,43**

Graphische Darstellung des Center Points



Der nicht-lineare Einfluss mindestens einer der Faktoren wird ohne Center Points nicht erkannt.

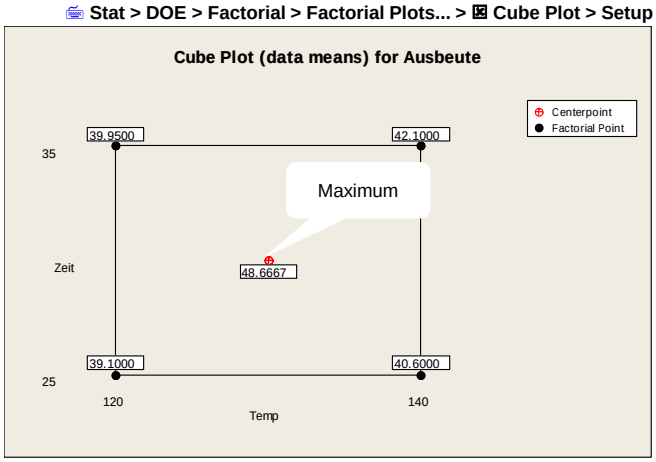
Der nicht-lineare Einfluss könnte auch von der Zeit kommen, die als Haupteffekt nicht signifikant ist.

Das beste im Versuch erzielte Ergebnis liegt am C.P. Ob dies ein Optimum darstellt, kann nicht gesagt werden, da der C.P. die mittlere Einstellung aller Faktoren ist.

Cube Plot mit Center Point

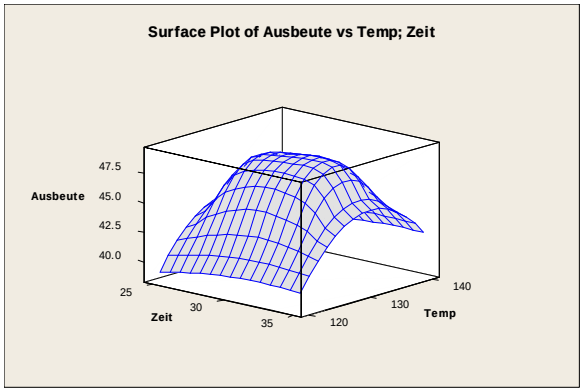
Der Center Point ist die mittlere Stufe (Einstellung) aller Faktoren gleichzeitig.

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots... > Cube Plot > Setup



Surface Plot

Graph > 3D-Surface Plot... > Wireframe



?

Weshalb darf der Surface Plot hier nicht verwendet werden??

Surface Plot und der Contour Plot dürfen nicht für C.P.-Designs verwendet werden!!
(Im DoE-Menue stehen diese Plots auch nicht zur Verfügung!!)

Übung: Design mit Center Point

Datei: **Ausbeute5.mtw**

Ziel: Untersuchung der Auswirkungen von Konzentration, Verhältnis B/A und Temperatur auf die Ausbeute.

Output: Ausbeute in % (je höher desto besser).

Inputs:

Konzentration	(low, high)
Verhältnis B/A	(low, high)
Temperatur	(low, high)

Design: 2*2*2 Factorial mit 3 Center Points (medium - medium - medium)

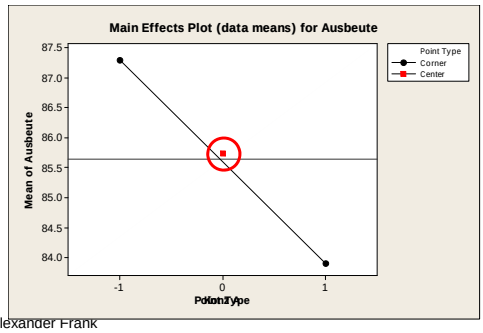
Verfahren:
- Analysieren Sie die Daten auf Krümmung, WW und Haupt-Effekte.
- Analysieren Sie graphisch die jeweiligen Effekte.
- Untersuchen Sie die Residuen.
- Machen Sie Ergebnisprognosen und berechnen Sie Epsilon-Square
- Berichten Sie Resultate und Schlussfolgerungen.

Analyse des Experimentes

Factorial Fit: Ausbeute versus Konz A

Estimated Effects and Coefficients for Ausbeute (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		85,636	0,2694	317,87	0,000
Konz A	-3,400	-1,700	0,3159	-5,38	0,000

S = 0,893523 R-Sq = 76,29% R-Sq(adj) = 73,66%

Der Center Point ist nicht signifikant und wurde aus dem Modell entfernt. Signifikant ist im Beispiel nur die Konzentration A, die minus-Einstellung ist die bessere.