# Speciel Relativitet og GPS-satellitter

SOP i Fysik og Matematik

**Viktor Vintergaard Lassen**
**3.d**

Vejledere
Jonas Olden Kromann og Kaper Prindal-Nielsen
H.C Ørsted Gymnasiet Lyngby
18.03.22

# 1 Opgaveformulering

**Hvilken rolle spiller den specielle relativitetsteori for stedbestemmelse på Jorden?**

Redegør for principperne bag GPS/satellitkommunikation, herunder hvorfor det er et problem hvis GPS-satellitters interne ur går hurtigere eller langsommere relativt til en observatør på jorden

Redegør for Lorentztransformationen og dens rolle i den specielle relativitetsteori med fokus på tidsforlængelse. Redegør derudover, uden bevis, for tidsforkortning i den generelle relativitetsteori

Gør rede for tidsforlængende og tidsforkortende omstændigheder i forbindelse med satellitters bevægelse om Jorden, og lav en model for sammenæhængen mellem en satellitbanes radius og den samlede tidsforlængelse/-forkortning relativt til en observatør på Jorden.

Analyser mindst 3 forskellige konkrete satellitbaner (f.eks. GPS-satellitter, geostationære eller ISS) med henblik på at bestemme den nødvendige tidskorrektion af deres interne ur.

Diskuter med udgangspunkt i analysen den nødvendige præcision af det interne ur i en GPS-Satellit

# Indhold

## 2 Resume

I opgaven har vi fokus på hvilken rolle den specielle relativitetsteori har for positionsbestemmelse på jorden. I opgaven bliver der redegjort for det nødvendige teori vi skal kende til for at løse opgaven og får at analysere nogle konkrete satellitbaner. Dette er bland andet Lorentztransformationen og dens rolle i speciel relativitetsteori, gravitationel tidsforkortelse og dens betydning for usikkerheder, og hvordan GPS-satellitter udregner positioner på jorden. I opgaven overvejer jeg hvilke betydninger som usikkerheder i tid for GPS-satellitterne kan give for poisitionsbestemmelse på jorden, og hvordan man inkorporerer de tidsforkortende/tidsforlængende effekter i modeller for positionsbestemmelse.

## 3 Indledning

Einstein ændrede den måde vi opfatter tid og rum på, og med sine relativitetsteorier har han formået at støbe grundlaget for meget moderne teknologi. Siden Einstein, har teknologien taget et kæmpe spring. Einteins relativitetstoerier gjorde det nemlig muligt at udvikle en teknologi, der med uhyggelig præcision, kunne måle vores placering på jorden. GPS-teknologien er ikke kun afhængig af, men ubrugelig uden Einsteins relativitetsteorier, og da det er en noget som de fleste af os benytter flere gange om dagen, har Einstein virkelig sat sit præg på moderne teknologi.

Einstein gjorde den opdagelse, at tid for legemer i bevægelse, går langsommere for en stillestående observatør. En stillestående observatør vil altså opleve tiden anderledes, end en observatør i bevægelse. Samtidig har tyngdekraften også en stor betydning for, hvordan tiden opleves. Legemer påvirket at en mindre tyngdekraft, vil opleve tid langsommere end legemer påvirket af en større tyngdekraft. I dagligdagen har disse effekter ikke rigtig nogen betydning, men for GPS-teknologien spiller de en stor rolle.

Fordi satellitter bevæger sig med hastigheder op mod 28.000 km/h[1], kommer disse effekter i spil, og vi bliver derfor også nødt til at regne med dem. For at kunne regne på dette, skal vi blandt andet have kendskab til, hvordan satellitterne taler med en modtager på jorden, og hvordan relativitet kommer ind i billedet. Her i opgaven vil jeg se på hvilken betydning som den specielle- (og til dels også den generelle) relativitetsteori for stedbestemmelse på Jorden.

## 4 GPS-kommunikation og beregning af position på jorden

Det Gloabale Positions System (GPS) bliver brugt i praktisk talt alt hvad vi foretager os. Om vi er ude at flyve, ude at sejle, eller bare skal bruge Google Maps, så er GPS i spil. GPS startede som en amerikansk opfindelse, som udelukkende blev udviklet til militært brug, men blev senere gjort offentlig for alle at bruge. Systemet er bygget op af 24 operative satellitter, der sørger for, at vi altid kan vide hvor vi befinder os henne på jorden. Når vi skal have målt vores position, kræver det, at satellitterne snakker sammen med en modtager her på jorden. Når modtageren skal udregne vores position, kræver det, at den opfanger et signal fra satellitten, som indeholder satellittens position og tidspunktet som signalet udsendes. Dette tidspunkt skal være så præcist som overhovedet muligt, da bare få millisekunder kan skabe kæmpestore usikkerheder i udregninger for vores position. Derfor er satellitterne indbygget med et atomur, der har en usikkerhed på ca. 1 sekund hver 100 millioner år, hvilket lyder virkelig præcist. Dog er én satellit ikke helt nok til at lokalisere modtageren. det kræver nemlig flere satellitter, og det er her metoden ”Trilateration” kommer ind i billedet.

[1] `https://www.space.com/6870-spot-satellites.html`

## 4.1 Trilateration

Når en satellit udsender et signal, kan den ikke måle hvor henne signalet bliver modtaget, men kun tiden det tager for signalet at blive modtaget. Dette betyder at vi kender afstanden $d$ fra satellitten til modtageren da

$$d = v \cdot t$$

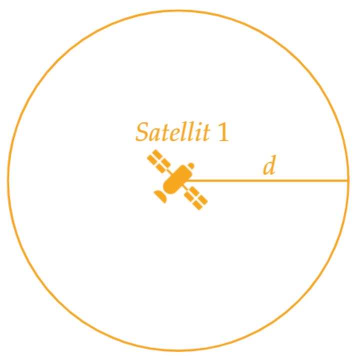
I vores situation udsender satellitten et signal med lysets hastighed $c$ og tiden der måles er en forskel fra hvornår signalet udsendes fra satellitten ($t_s$) til hvornår det modtages af modtageren ($t_m$).

$$t_m - t_s$$

Derfor kan vi beskrive distancen mellem modtager og sattellit som

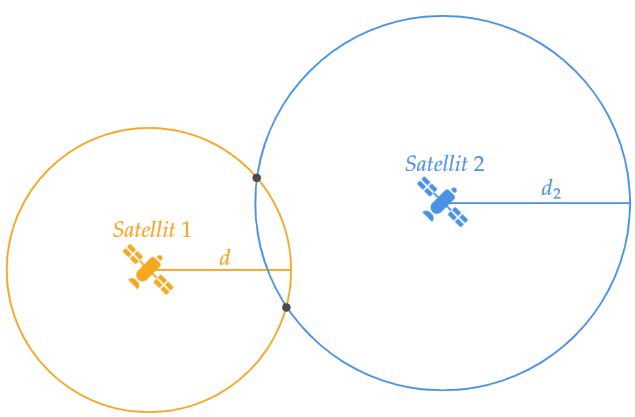
$$d = c \cdot (t_m - t_s)$$

Hvis vi simplificere det og arbejder i 2 dimensioner, danner dette altså en cirkel om satellitten med en radius $d$, hvor modtageren kan befinde sig hvor som helst på periferien



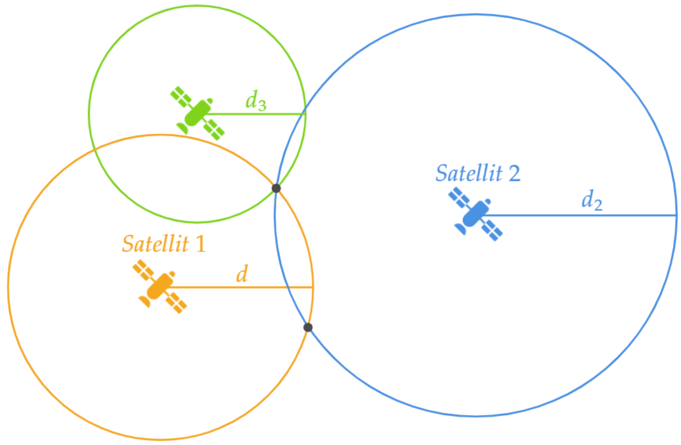

figur 1 - satellit 1

Som vi kan se på figur 1, er det svært at afgøre, hvor satellitten befinder sig, men hvis vi tilføjer endnu en satellit til systemet, får vi indskrænket antallet af mulige positioner. Vi bruger nu endnu en satellit, som udsender et signal til modtageren og får derfor endnu en radius



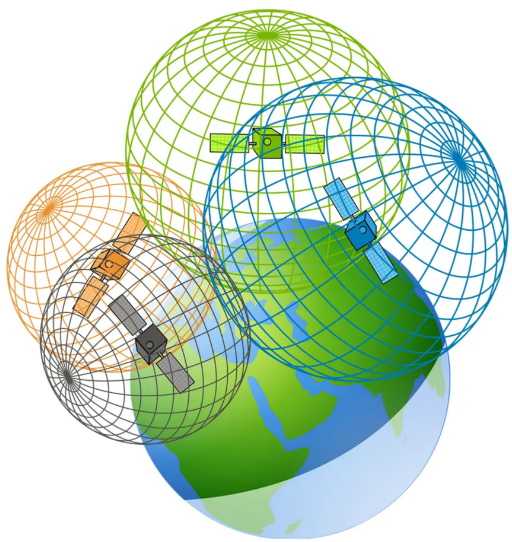

figur 2 - satellit 1 og 2

Vi har indskrænket antallet af mulige positioner til 2, men hvis vi tilføjer endnu en satellit, får vi én position




figur 3 - satellit 1 og 2

Vi lever selvfølgelig ikke i en 2-dimensionel verden, så derfor når vi bruger denne metode i virkeligheden, er det med kugler og ikke cirkler, som illustreret for neden.



figur 4 - Trilateration

I en verden hvor modtageren og satellittens tid er perfekt synkroniseret, ville man kunne nøjes med 3 satellitter til at kunne afgøre positionen. For satellitten er det intet problem at holde tiden næsten perfekt, da den er udstyret med et atomur. Dog har modtageren sværere ved det, og der kommer derfor en forskydning mellem de 2 tider, som man bliver nødt til at regne med.

$$t_m = t_s + \Delta t$$

Denne ekstra ubekendte, skal vi også have udregnet, og vi tilføjer derfor en ekstra satellit til systemet som vist på figur 4

## 4.2 Positioner på jorden

Når en modtager på jorden skal udregne sin position på Jorden gør den brug af trilateration, og skal derfor kende satellitternes positioner og hvor lang tid det tager signalerne at komme fra satellit til modtager. Disse kugler kan vi beskrive med ligningen[2]

[2] `https://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-a/vektorer-i-3d/kuglen`

$$(x_m - a_n)^2 + (y_m - b_n)^2 + (z_m - c_n)^2 = d_n^2$$

hvor $(x_m, y_m, z_m)$ er modtagerens position, $(a_n, b_n, c_n)$, er satellittens position, hvor n referere til nummer satellit og $d$ er afstanden fra satellit til modtager. Her kan $d_n$ erstattes med $c\cdot((t_s+\Delta t)-t_s)_n$. Vi kan med vores 4 kugler opstille et ligningssystem.

$$\begin{cases} (x_m - a_1)^2 + (y_m - b_1)^2 + (z_m - c_1)^2 = c \cdot ((t_s + \Delta t) - t_s)_1^2 \\ (x_m - a_2)^2 + (y_m - b_2)^2 + (z_m - c_2)^2 = c \cdot ((t_s + \Delta t) - t_s)_2^2 \\ (x_m - a_3)^2 + (y_m - b_3)^2 + (z_m - c_3)^2 = c \cdot ((t_s + \Delta t) - t_s)_3^2 \\ (x_m - a_4)^2 + (y_m - b_4)^2 + (z_m - c_4)^2 = c \cdot ((t_s + \Delta t) - t_s)_4^2 \end{cases}$$

Er det virkelig så simpelt? Desværre ikke. Selvom ligningssystemet er rigtig nok i sig selv, kommer positionerne på jorden hurtigt til at blive forkerte. Dette skyldes Einsteins relativitetsteorier, som vi skal kigge nærmere på.

# 5 Einsteins specielle relativitetsteori

Einstein gjorde opdagelsen, at tid ikke er absolut, som man siden Newton ellers havde troet. Med sine relativitetsteorier, revolutionerede han måden vi opfatter fysik på. i 1905 udgav Einstein sin specielle relativitet, og er blandt andet her den nok mest berømte ligning $E = mc^2$ kommer fra. Einsteins specielle relativitetsteori bygger på to postulater:

1. De fysiske love er identiske i alle inertialsystemer, altså i en referencerammer hvor der ingen acceleration er

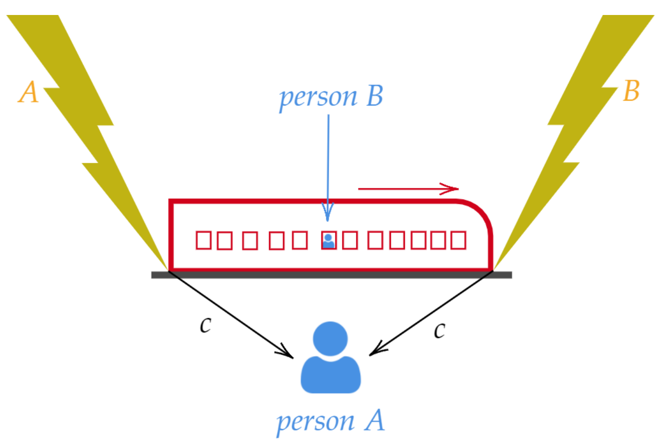
2. lysets hastighed i vakuum er den samme for alle observatører uanset hastighed.

Med disse to postulater, starter vi med at kigge på princippet bag relativitetsteorierne

## 5.1 Princippet bag relativitet

Relativitetsteorierne starter med, at vi oplever de samme begivenheder forskelligt i forskellige referencerammer. Altså, to personer som ikke bevæger sig med samme hastighed, vil opleve to begivenheder forskelligt. I Einsteins ånd kan vi vise dette med et klassisk tankeeksperiment:

Forestil dig, at du står ved en jernbane. Et tog kommer kørende og når togets midte er ud fra dig, ser du 2 lynnedslag: et på togets front og et på enden.

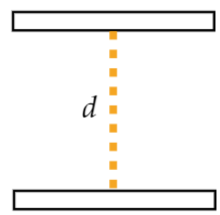



figur 5 - Togeksperiment

som person A, da vi står midt mellem lynnedslagene, vil vi opleve at de to lyn rammer ned samtidig. Vi kan også måle længden af toget, som afstanden mellem de to lynnedslag, men dette er ikke det samme vi oplever som person B. Her sidder vi nemlig inde i toget, og bevæger os mod lydnedslag B og væk fra lynnedslag A. det betyder, at lyset fra lynnedslag B rammer os først, hvor vi bagefter rammes af lyset fra lynnedslag A. som person B oplever vi ikke lynnedslagene samtidig, hvilket også betyder at person B måler længden af toget til at være noget andet. Vi oplever altså den samme begivenhed på to forskellige måder, og dette sker fordi tid ikke er en absolut størrelse, men relativ. den afhænger af, hvilken referencerammer vi er i. Samtidig er rum også en relativ størrelse, men dette vil vi ikke komme ind på. Dette er altså en konsekvens af vores anden postulat: at $c$ er ens for alle inertial referencerammer

## 5.2 Lorentzfaktoren og den tidsforkortende effekt

Lysets konstante hastighed har, som vi så i togeksperimentet, en indvirkning på hvordan vi oplever tid forskelligt i forskellige referencerammer. Lad os se på et eksempel for at få en bedre forståelse:




figur 6 - Lysur

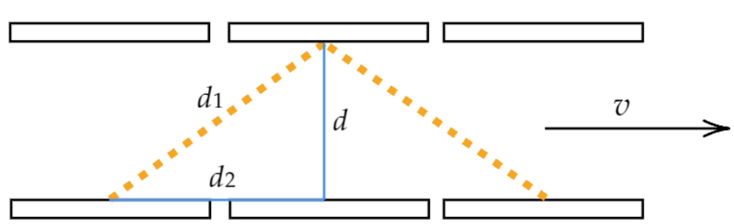
Her på figuren er der illustreret et ur, hvor en foton hopper mellem 2 plader. Hver gang fotonen rammer en plade, hører vi et "tick". Hvis vi skulle udregne denne distance $d$ ville det være

$$d = c \cdot t$$

Lad os nu sætte lysuret ombord på et rumskib og lad det flyve afsted. For en observatør ombord på rumskibet som bevæger sig samme hastighed $v$ som lysuret, ville han stadig se fotonen hoppe lige op og ned mellem de 2 plader, men det samme er ikke tilfældet for en stillestående observatør på jorden. For observatøren i rumskibet, ville vi stadig kunne beskrive afstanden $d$ som lysets hastighed gange den tid som observatøren i rumskibet observere. Denne tid kalder vi egentiden $t_o$

$$d = c \cdot t_0$$

Når uret er i bevægelse, ser en stillestående observatør, at fotonen ikke længere bevæger sig om og ned, men skråt op og skråt ned




figur 7 - Lysur med hastighed v

observatøren stillestående på jorden, ville altså kunne beskrive et "tick" med distancen $d_1$, som er lysets hastighed ganget med den tid som den stillestående observatør observerer:

$$d_1 = c \cdot t$$

Udover det, kan vi beskrive distancen $d_2$ som hastighed ganget tiden observeret:

$$d_2 = v \cdot t$$

Med Pythagoras sætning kan vi nu opstille ligningen

$$d_1^2 = d^2 + d_2^2$$

$$(c \cdot t)^2 = (c \cdot t_0)^2 + (v \cdot t)^2$$

Vi isolerer nu $t$

$$c^2 \cdot t_0^2 = c^2 \cdot t^2 - v^2 \cdot t^2$$

$$t^2 = \frac{c^2 \cdot t_0^2}{c^2 - v^2}$$

Vi kan lave en smart faktorisering:

$$t^2 = \frac{c^2 \cdot t_0^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

vi tager nu kvadratroden på begge sider og ender derfor med:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Formlen her kan vi altså bruge til at beskrive hvordan en tid i bevægende referenceramme opleves for en stille stående observatør. Tit bliver denne formel også skrevet som

$$t = t_0 \cdot \gamma, \text{ hvor } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

og hvor $\gamma$ kaldes lorentzfaktoren

Når vi arbejder med relativitet, er det vigtigt at kunne skifte sit "perspektiv", så man kan se hvordan tid og rum ser ud i andre referencerammer. Her skal vi kunne lave en koordinattransformation for et rum til et andet.

# 6 Lorentztransformationen

Lorentztransformationen er, ligesom andre transformationer, en måde hvorpå vi kan "skifte perspektiv" og se tingene fra andre referencerammer. Lorentztransformationen er en måde at se hvordan den samme begivenhed ser ud i forskellige inertialsystemer (et system uden acceleration). I forhold til Galilei-transformationen[3], hvor vi bruger klassisk mekanik som teoretisk grundlag, og som er mere intuitiv, er lorentztransformationen en del anderledes, da den er relativistisk. Lorentztransformationen bygger på, at uanset referenceramme vil man opleve lysets hastighed på samme måde.

Lorentztransformationen $T$ transformerer koordinaterne $(x, y, z, t)$ i $S$ til koordinaterne $(x', y', z', t')$ i $S'$

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_transformation`

$$T : S \to S'$$

eller hvis man beskriver transformationen via et rumtids-diagram[4]

$$T \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix}$$

på følgende måde:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v \cdot x}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Det spændende ved denne transformation, er at den indeholder tiden. Dette bliver relevant når vi arbejder med høje hastigheder hvor de relativistiske effekter pludselig kommer i spil. Derfor er denne transformation vigtig, da tiden i et intertialsystem nødvendigvis ikke er den samme i et andet.

### 6.1 Gravitationel tidsforkortelse

Udover at hastighed har en påvirkning på hvordan tid bliver observeret i to inertiale referencerammer, har tyngdefelter det også. der er nemlig en sammenhæng mellem det gravitationelle potentiale og tiden der bliver observeret. Hvis vi har placeret et ur på jordoverfladen og et på toppen af et bjerg, vil vi bemærke at uret på toppen af bjerget vil gå hurtigere end det på jordoverfladen. Selvfølgelig ville denne effekt være minimal for os her på jorden, men når vi har med satellitter at gøre, som kredser om jorden langt ude i rummet, og som har brug for uhyggelig stor præcision, skal denne relativistiske effekt medregnes. Dette kan vi gøre med formlen

$$t_0 = t \cdot \sqrt{1 - \frac{2GM}{r \cdot c^2}}$$

hvor $t_0$ er egentiden for et objekt påvirket af massen M's tyngdefelt. $t$ er tiden observeret fra en arbitrær stor afstand fra massen hvor de relativistiske effekter ikke er i spil, $N$ er Newtons gravitationskonstant og $c$ er lysets hastighed. Det er vigtigt at bemærke, at denne formel er afledt af Schwarzschild-metrikken, som er en eksakt løsning til Einsteins feltligniger, og nævnes fordi løsningen kun virker for en sfærisk-symmetrisk masse, og er derfor vi kan bruge den med jorden. Mere kommer jeg ikke til at gå i dybden med den, da det ville kræve noget virkelig heftig matematik og fysik.

## 7 Tidsforlængelse og tidsforkortelse for satellitter

Både speciel- og generel relativitet har en stor effekt på satellitters nøjagtighed, så derfor har både hastigheden af satellitten og radius af dens bane noget at skulle sige om de tidsforlængende og tidsforkortende omstændigheder. Ifølge den specielle relativitet, går tiden for en observatør i bevægelse langsommere relativt til en stillestående observatør. denne forkortende effekt beskriver vi som

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Spacetime_diagram`

$$t'_v = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Hvis vi kunne tænke os at finde ud af, hvordan tiden er for en satellit i bevægelse relativt til en stillestående observatør, bruger vi denne formel. Udover dette, befinder satellitten sig også i et tyngdefelt, så vi skal også regne den generelle relativitet med, som vi gør med formlen

$$t'_g = t \cdot \sqrt{1-\frac{2 \cdot G \cdot M}{r \cdot c^2}}$$

Vi skal dog være opmærksom på, at modtagerens ur på jorden også oplever en tidsforkortende effekt, da modtagerens ur også befinder sig i tyngdefeltet, som vi også skal regne med. den samlede generelle relative effekt vil være differensen mellem dem.

$$t'_{g,sat} - t'_{g,jord}$$

den samlede relativistiske effekt for en satellit relativ til en observatør på jorden er derfor

$$(t - t'_v) + (t'_{g,sat} - t'_{g,jord})$$

hvor $t$ er tiden relativt til en observatør på jorden som er stillestående. Vi kan nu opstille en model, der beskriver den samlede tidsforkortende/tidsforlængende effekt, som en satellit bliver påvirket med relativt til en observatør på jorden

$$\left(t - \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \left(t \cdot \sqrt{1-\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_{sat} \cdot c^2}} - t \cdot \sqrt{1-\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_{jord} \cdot c^2}}\right)$$

# 8 Analyse af satellitbaner

Når en modtager her på jorden skal udregne dens position, kræver det at den hele tiden kender satellitternes positioner (og at disse positioner er rigtige). Vi vil derfor analysere nogle satellitbaner, for at se hvordan relativitetsteori spiller en rolle i positionsbestemmelse.

## 8.1 Analyse af ISS's banen med henblik på tidskorrektion

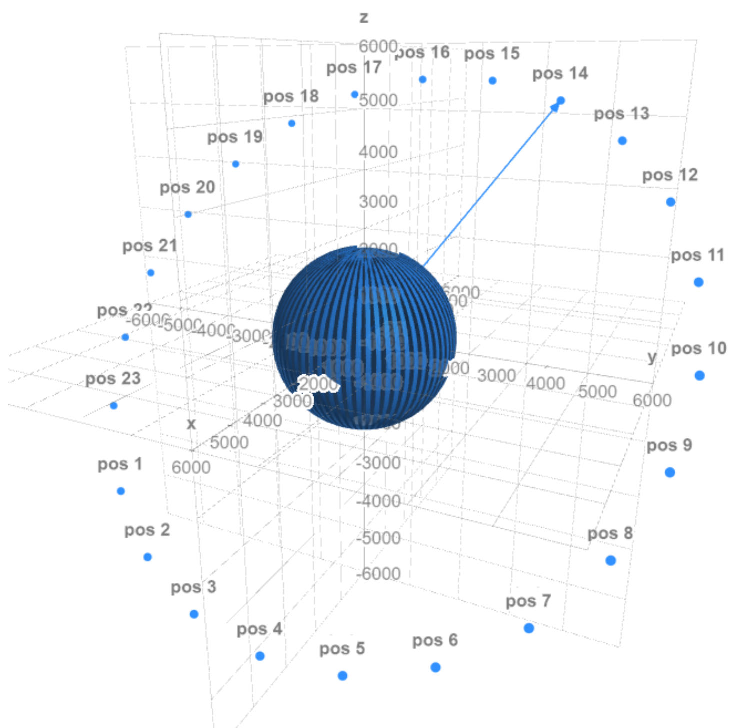
Vi starter med at kigge på, hvordan ISS bevæger sig. Med data fra Nasa.[5] kan vi afgøre hvor stor en indvirkning speciel- og generel relativitet har på usikkerheden af positioner på jorden. Dataen her fra Nasa er med en J2000 (J2K) referenceramme, som er en inertial referenceramme hvor origo er lokaliseret i jordens massemidtpunkt[6]. Fra datasættet får vi de orbitale tilstandsvektorer[7] hvor hver tilstandsvektor indeholder tiden i UTC, positioner i X,Y og Z i $km$; og hastigheder i X,Y og Z i $\frac{km}{s}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

[5] https://spotthestation.nasa.gov/trajectory_data.cfm
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Earth-centered_inertial
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/State_vector_(navigation)

Hvor der er 4 minutter mellem hver tilstandsvektor.

Vi starter med at antage at ISS har en jævn cirkelbevægelse om jorden. Dette er ikke rigtig over tid, men får en enkelt omgang om jorden, er dette en passende antagelse. Derudover antager vi også ingen luftmodstand, selvom det faktisk er tilfældet for ISS. Rumstationen befinder sig nemlig i en højde, hvor der er et tyndt luftlag. Dette vælger vi at se bort fra, da det næsten ingen betydning har for de relativistiske effekter.




figur 8 - ISS i kredsløb om jorden

Her er jorden slet ikke i rigtig størrelse, men er blot med for at illustrere, at den er der. For at sige noget om de relativistiske effekter skal vi først bruge farten. Her kan vi bruge hastighedskomponenterne for en af de givne positioner. Lad os tage udgangspunkt i "pos 14", som har den orbitale tilstandsvektor

$$x(3120) = \begin{bmatrix} -3601.203312763590 \\ 3055.671159367830 \\ 4882.364923068550 \\ -2.50160936387560 \\ -6.82358000634229 \\ 2.42112941812783 \end{bmatrix}$$

Her tager vi $(v_1, v_2, v_3)$ som er hastighederne i $(x, y, z)$ retningen og finder længden af denne hastighedsvektor (som er farten)

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

vi omregner hastighederne til $\dfrac{km}{t}$ ved at gange med 3600

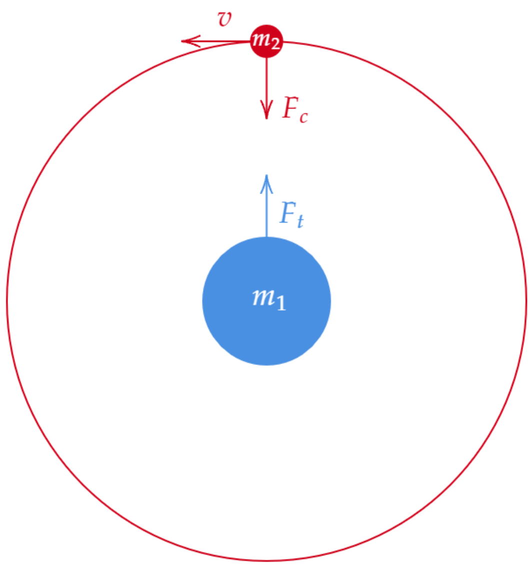
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2.50160936387560 \cdot 3600)^2 + (-6.82358000634229 \cdot 3600)^2 + (2.42112941812783 \cdot 3600)^2}$$

$$|\vec{v}| = 27577.30677 \frac{km}{t}$$

vi får at i "pos 14" har ISS en fart på $27577 \frac{km}{t}$. for god ordens skyld, kan vi regne efter med lidt klassisk mekanik:

### 8.1.1 Tjek efter med klassisk mekanik

Siden ISS er i et stabilt jævnt kredsløb, må tyngdekraften som påvirker ISS være lige så stor som centripetalkraften, der accelerere rumstationen.




figur 9 - ISS om jorden (illustration)

$$F_c = F_t$$

Vi kan bruge Newtons 2. lov til at regne denne centripetalkraft:

$$F_c = m_2 \cdot a$$

og siden vi arbejder med en jævncirkelbevægelse, bliver accelerationen beskrevet som $a = \frac{v^2}{r}$

$$F_c = m_2 \cdot \frac{v^2}{r}$$

Vi ved at $F_t$ er gravitationskraften mellem $m_1$ og $m_2$ og beskrives som

$$F_t = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

og siden de er lig hinanden:

$$m_2 \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Nu kan vi så isolere for hastigheden $v$ som giver os

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_1}{r}}$$

Vi finder nu $r$, som er længden fra centrum af jorden (origo) og ud til en af positionerne. Her har vi brugt "pos 14", men det kunne lige så godt havde været en af de andre, siden banen er en jævn cirkelbevægelse(se figur 6)

$$|\overrightarrow{r}| = \sqrt{(-3653.743635964730km)^2 + (-3909.893666194850km)^2 + (4185.340465533270km)^2}$$

$$|\overrightarrow{r}| = 6793.687207km$$

Vi kan nu indsætte afstanden mellem jordens centrum og ISS $|\overrightarrow{r}|$ og jordens masse i formlen for hastigheden

$$v = \sqrt{\frac{6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{6793687.207m}}$$

$$v = 7658.693182 \frac{m}{s}$$

Det giver os næsten præcis det samme resultat som vi regnede fra datasættet

$$7658.693182 \frac{m}{s} \approx 27577.30677 \frac{km}{t}$$

#### 8.1.2 tidskorrektion for ISS

Da vi har farten for rumstationen, kan vi kigge på hvordan Einsteins specielle relativitetteori påvirker det interne ur på ISS. Vi kigger på en hel omgang om jorden og her gør vi brug af lorentztransformationen:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \text{ hvor } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Her er $\Delta t'$ tiden målt for observatøren i bevægelse (rumstationen) og $\Delta t$ er tiden målt i det stillestående observatør (modtageren på jorden)
Vi finder omløbstiden[8] $T$ som

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_1}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(6793687.207m)^3}{6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}}$$

$$T = 5573.535150s$$

Vi indsætter denne tid som $\Delta t$ og farten for rumstationen i lorentztransformationen

[8] `https://orbithtxa.systime.dk/?id=291`

$$\Delta t' = 5573.535150s \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(7658.693182\frac{m}{s}\right)^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = 5573.5351518187325818938511774$$

$$\Delta t - \Delta t' = -0.0000018187325818938511774$$

Som vi kan se, har rumstationens fart en indvirkning på, hvordan de interne urer på ISS går. Vi skal dog stadig tænke på, at den generelle relativitet er i spil, da rumstationen befinder sig i et tyngdefelt, og derfor oplever tidsforkortning. Rumstationen oplever nemlig mindre påvirkning af tyngdefeltet end en observatør på jordens overflade gør. derfor skal denne effekt også medregnes. Her bruger vi formlen for tidsforkortelse i den generelle relativitet:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{2G \cdot m_1}{r \cdot c^2}}$$

Hvor $\Delta t'$ er den relative tid (i tyngdefeltet), $\Delta t$ er tiden for et ur der ikke er påvirket af tyngdekraften (i en referenceramme der ikke er i et tyngdefelt), $m_1$ er massen af objektet der skaber tyngdefeltet og $r$ er afstanden fra centrum af objektet der skaber tyngdefeltet.

Her skal vi dog huske, at vi regne med at massen ligger i massemidtpunktet. Modtageruret, altså uret på overfladen af jorden, bliver derfor også påvirket af den tidsforkortende effekt. Vi er dog kun interesseret i forskellen mellem denne, og den tidsforkortende effekt som ISS bliver påvirket af. Vi udregner derfor den tidsforkortende effekt for både et ur på overfladen af jorden og for ISS og trækker dem fra hinanden. Vi stadig med omløbstiden $T$ som vores $\Delta t$. Afstanden til jordens overflade fra centrum er her $6371km$

$$\left(5573.535150s \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6.6726 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}kg}{6793687.207m \cdot c^2}}\right) -$$
$$\left(5573.535150s \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6.6726 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}kg}{6371000 \cdot c^2}}\right)$$

$$\Delta t'_s - \Delta t'_m = 0.0000002414s$$

hvor $\Delta t'_m$ og $\Delta t'_s$ er henholdsvis modtageren og rumstationens relative tider

Vi lægger nu de to relativistiske effekter sammen

$$(\Delta t - \Delta t') + (\Delta t'_s - \Delta t'_m) = -0.0000015773325818938511774s$$

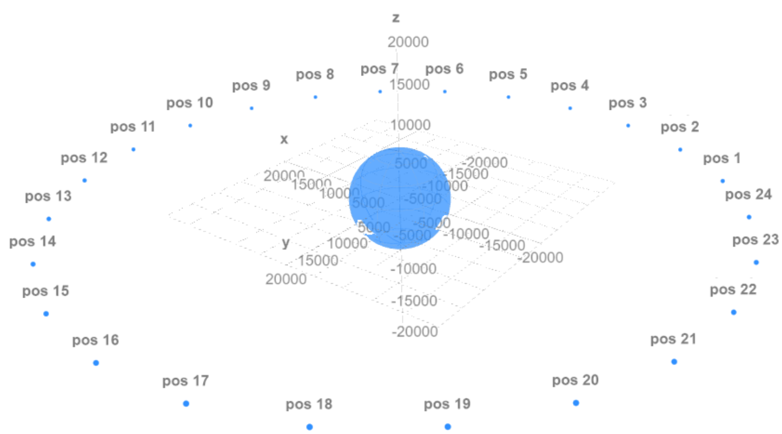
I følge beregninger, falder urene på ISS bagud med 1577.332581893851 nanosekunder hver gang de har været en omgang om jorden, hvilket kan blive et kæmpe problem. Regner vi denne usikkerhed i forhold til afstandsbestemmelse på jorden ($d = ct$) får vi

$$d = c \cdot 0.0000015773325818938511774s \approx 472.87m$$

Vi ser altså, efter en omgang om jorden, vil der nu være en usikkerhed på ca 472 meter når vi måler afstande på jorden. På bare halvanden time, er urene faldet så meget bag ud, at de er ubrugelige på afstandsbestemmelse på jorden. Det bliver endnu værre når vi arbejder med satellitterne bruges i trilaterion. De har nemlig typisk en afstand fra jorden på 20.000km, hvilket gør den generelle relativistiske effekt endnu større.

## 8.2 Analyse af EUTELSAT 174A's bane med henblik på tidskorrektion

EUTELSAT 174A er en geostationær satellit, der kan antages at bevæge sig med en jævn cirkelbevægelse om jorden (for en enkelt omgang er det en fin antagelse). Siden vi arbejder med en geostationær satellite vil det også sige, at omløbstiden for satellitten er 24 timer (23 timer og 56 minutter for at være præcis)




figur 10 - geostationær satellit

I datasættet for denne geostationære satellit, er vi ikke givet hastighederne for de forskellige positioner, så vi bliver derfor bliver nødt til selv at udregne at udregne dem med klassisk mekanik (ligesom i afsnit 6.1.1). for at finde farten bruger vi formlen

$$|v| = \sqrt{\frac{G \cdot m_1}{r}}$$

Vi har faktisk allerede afstanden fra jordens centrum til hver position (da det er en geostationær bane), men det er altid en god idé at tjekke efter med datasættet. Derfor tager vi udgangspunkt i en af positionerne og udregner længden for stedvektoren til positionen. Her tager vi udgangspunkt i position 24, som har stedvektoren

$$\overrightarrow{OP_{24}} = \begin{bmatrix} -37307 \\ -19696 \\ 196 \end{bmatrix}$$

og derfor har længden

$$|\overrightarrow{OP_{24}}| = \sqrt{(-37307km)^2 + (-19696km)^2 + (196km)^2}$$

$$|\overrightarrow{OP_{24}}| = 42187.47540km$$

Vi finder nu farten i dette punkt som

$$|v| = \sqrt{\frac{6.6726 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{42187475.40m}}$$

$$|v| = 3073.767348 \frac{m}{s}$$

Og omløbstiden for satellitten som

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(42187475.40m)^3}{6.6726 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}}$$

$$T = 86236.75624s$$

### 8.2.1 Tidskorrektion for geostationær satellit

Vi kan nu analysere, hvor stor en indvirkning som relativiteten har på en geostationær satellit. Vi gør præcis ligesom med ISS og starter med at kigge på tidsforlængelse med den specielle relativitet. Vi bruger igen lorentztransformationen. Vi bruger omløbstiden som $\Delta t$

$$\Delta t' = 86236.75624s \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(3073.767348 \dfrac{m}{s}\right)^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = 86236.756244532759134373881979 1s$$

så tiden på den geostationære satellit falder bagud med

$$\Delta t - \Delta t' = -0.0000045327591343738819791s$$

Dog bevæger den geostationære satellit sig meget længere ude end ISS gør, så derfor har den tidsforkortende effekt grundet tyngefeltet meget mere indlflydelse. Vi gør præcis det samme som ved udregninger for ISS

$$\left(86236.75624s \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6.6726 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{42187475.40m \cdot c^2}}\right) -$$

$$\left(86236.75624s \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6.6726 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{6371000m \cdot c^2}}\right)$$

$$\Delta t'_{gs} - \Delta t'_m = 0.0000509663s$$

Her er $\Delta t'_m$ den relative tid for en modtager på jorden og $\Delta t'_{gs}$ er den relative tid for den geostationære satellit. Vi lægger nu de 2 relativistiske effekter sammen og får

$$(\Delta t' - \Delta t) + (\Delta t'_{gs} - \Delta t'_m) = 0.00004643354087s$$

På et døgn (eller en omløbstid for satellitten) kommer der en usikkerhed på 46433 nanosekunder, hvilket virkelig er noget man skal tage med i sine udregninger. Hvis dette gjaldt afstandsbestemmelse på jorden, ville der komme en usikkerhed på

$$d = c \cdot 0.00004643354087s \approx 13.92 \tfrac{km}{dag}$$

## 9 nødvendig præcision af GPS-satellit ur

Som vi så i analysen, har både speciel- og generel relativitet en stor indflydelse på, hvor præcist satellitternes tid bliver målt, og bare med de mindste usikkerheder i tiden, skaber kæmpe usikkerheder i positionsbestemmelse på jorden. Derfor er det vigtigt at urerne for satellitterne bliver rettet, da vi ellers meget hurtigt vil opleve, at GPS slet ikke ville være brugbart. Hvor stor en præcision skal et ur i en satellit så have? Det kommer helt an på hvor stor en præcision i afstand vi vil have når vi måler vores placering på jorden. Den typiske præcision for GPS med vores smartphone ligger på 4-5 meter, så før dette skal være muligt skal urerne på GPS-satellitterne hav en præcision på 13.34-16.68 nanosekunder, hvilket er en uhyggelig stor præcision. Det betyder, at hver gang usikkerheden kommer op på de her 13-16 nanosekunder, skal der fortages en korrektion af satelliturerne. Dette kunne fx gøres med stationer her på jorden som konstant laver disse beregniner fra live satellitdata, hvor den sender et signal til satellitten når det er tid til at foretage en ny korrektion af tiden. På denne måde ville man minimere usikkerhederne i positionsbestemmelse.

Udover de relativistiske effekter som vi har regnet med i analysen, er der også mange andre effekter der påvirker præcisionen. Når signalet bliver sendt afsted fra satellitten skal de igennem de forskellige luftlag med forskellige densiteter, som bremser farten. Udover dette, er det ikke sikkert at signalet går direkte fra satellit til modtager. signalet kan ramme bygninger og lign. inden signalet modtages, som yderligere skaber usikkerheder.

## 10 Konklusion

For stedbestemmelse på jorden har både den specielle relativitet og den generelle relativitet en stor betydning for nøjagtigheden. Det er derfor essentielt at teorierne bliver taget med i overvejelserne vi gør os, når vi opstiller modeller for situationer vedrørende satellitter og positionsbestemmelse. Vi skal hele tiden sørge for at tiden på satellitterne bliver ved med at være synkroniseret med urerne i mobiler, fly, skibe og andre steder hvor man bruger GPS-teknologien.

## 11 Litteraturliste


Maltby, H. (s.d.). Linear Transformations. I: brilliant. https://brilliant.org/wiki/linear-transformations/#:~:text=A%20linear%20transformation%20is%20a,a%20linear%20operator%20or%20map.

170 hours satellite tracking list based on TLE for EUTELSAT 174A. (s.d.). satellite-calculations. https://www.satellite-calculations.com/11parameter/ephemeris/trackinglist.php?53.3772668N/2.8813544W/0.0600136260986328/28924/170/60/0/0.6/11.7/?/

GPS Accuracy. (s.d.). gps.gov. https://www.gps.gov/systems/gps/performance/accuracy/¡
Gravitational time dilation. (s.d.). I: Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_time_dilation

How GPS Receivers Work – Trilateration vs Triangulation. (s.d.). I: gisgeography. https://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps/

Lorentz transformation. (s.d.). I: wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation#:~:text=The%20Lorentz%20transformation%20is%20a,interval%20between%20any%20two%20events.

Pogge, R.W. (s.d.). Real-World Relativity: The GPS Navigation System. I: Real-World Relativity: The GPS Navigation System. https://www.astronomy.ohio-state.edu/pogge.1/Ast162/

Unit5/gps.html

Samuelson, A. (s.d.). What Is an Atomic Clock?. I: Nasa. https://www.nasa.gov/feature/jpl/what-is-an-atomic-clock

Satellite Coordinates. (s.d.). I: esa. https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Satellite_Coordinates

Satellite Coordinates Computation. (s.d.). I: esa. https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Satellite_Coordinates_Computation

Satellite Navigation - GPS - How It Works. (s.d.). I: faa. https://www.faa.gov/about/office_org/headquarters_offices/ato/service_units/techops/navservices/gnss/gps/howitworks#:~:text=An%20atomic%20clock%20synchronized%20to,longitude%2C%20altitude%2C%20and%20time.

Spacetime diagram. (s.d.). I: wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Spacetime_diagram