MatmedLassen
1.G
Matematik Notesamling

Alt matematik du skal bruge i 1.G

Forklaret let og forståeligt

Matmedlassens notesamling til første år på gymnasielle uddannelser
Skrevet af Viktor Lassen
Illustrationer af Viktor Lassen
Omslag af Viktor Lassen, Lasse Raun og Frederik Lassen
Tilrettelægning af Viktor Lassen og Marie Dimpker
4. udgave
Printet i Danmark
ISBN 978-87-974520-0-4

Matmedlassen.dk

Matematiktutor

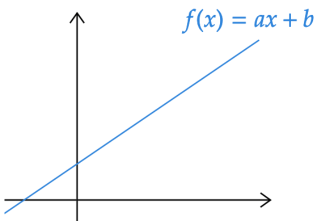
Få adgang til alle mine matematikvideoer, quizzer, træningsspørgsmål, og skræddersyet feedback her!

Indhold

Lineære funktioner

Funktioner vokser på mange forskellige måder, som hver beskriver en måde, hvorpå ting udvikler sig i virkeligheden. Det kan være hvordan ens penge på bankkontoen vokser med en bestemt rente, eller hvordan prisen for en taxa vokser for hver kilometer man har kørt. Når vi snakker om lineære funktioner, mener vi ting der vokser lineært. Altså når grafen for en funktion er en lige linje. Mange situationer ude i virkeligheden bliver beskrevet med en såkaldt lineær funktion.
Hver funktionstype har sin egen forskrift, som er en form funktionen skal opfylde, før det er den bestemte type. En lineær funktion har forskriften

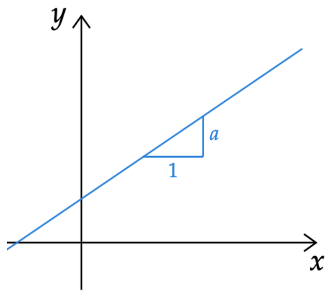
$$f(x) = ax + b$$



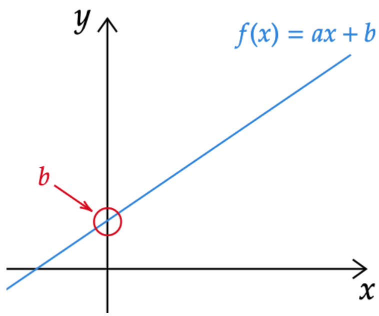
Her står der at funktionsværdien er lig med den tilhørende x-værdi ganget med a plusset med en konstant b.

Betydningen af a og b

I forskriften for den lineære funktion ser vi 2 værdier, som vi ikke kender til, nemlig a og b. a er hældningen på linjen. Hældningen for en ret linje defineres som hvor meget vi går op af y-aksen, når vi går 1 hen på x-aksen. På figuren er der vist definitionen af, hvad hældningen er. Som man måske kan gætte sig til, vil det altså betyde jo større a-værdien er, jo stejlere er den rette linje. Hældningskoefficienten (a) fortæller altså noget om hvor meget funktionen hælder.



b-værdien er noget mere simpel. Den beskriver nemlig hvor henne funktionen skærer y-aksen.



I dette eksempel vil b-værdien for den lineære funktion være 2, da funktionen skærer y-aksen i 2.

Hvordan ved vi, at b-værdien beskriver skæringen med y-aksen? Alle punkterne inde på selve y-aksen har en ting til fælles; alle x-værdierne er 0. Det er de fordi vi er inde på y-aksen. Det betyder altså, at hvis vi vil finde det sted hvor funktionen er på y-aksen, skal vi bare indsætte 0 på x's plads i forskriften for den rette linje:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) = a \cdot 0 + b$$

Vi kan se, at leddet med a forsvinder helt, da det ganges med 0, og vi har derfor kun b tilbage.

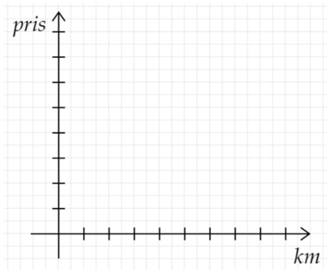
$$f(0) = b$$

Vi har nu vist, at skæringspunktet mellem y-aksen og vores rette linje, er hvad b-værdien beskriver.

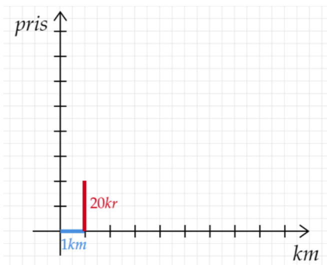
Betydning for a og b i virkeligheden

Når vi arbejder med lineære funktioner i virkeligheden, kan en betydning som ”skæring med y-aksen” virke mærkelig, så derfor kigger vi på et eksempel, der kan hjælpe med forståelsen.
Som vi ved, viser a-værdien, hvor meget vi går op af y-aksen når vi går 1 hen på x-aksen. lad os sige vi bestiller en taxa, og vi gerne vil opstille en funktion for prisen, så vi kan bestemme præcis hvor meget det kommer til at koste for hver km vi kører.
Vi får at vide, at det koster 20 kr. pr. km, og samtidig er der et startgebyr på 40kr.

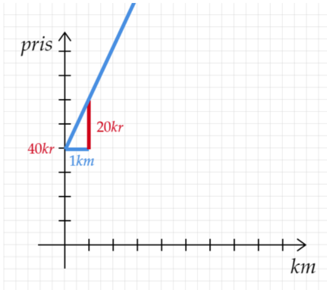
Vi kan starte med at se hvilke variabler vi skal have på x- og y-aksen. Her ser det ud til, at prisen er afhængig af hvor langt vi kører, så derfor skal vi have km på x-aksen og prisen på y-aksen. Det er det, der giver mest mening.



Vi ved at en lineær funktion kommer på formen $f(x) = ax + b$, så vi skal bare finde a og b-værdierne. Vi får at vide, at når vi har kørt 1 km, skal vi betale 20 kr. Det er præcis det a-værdien svarer til, nemlig hvor meget vi går op af y-aksen når vi går 1 hen af x-aksen.



Her har vi km på x-aksen. Vi ser altså at vi har en hældning på 20. Dog ser vi også, at vi har et startgebyr på 40kr, så når vi sætter os ind i taxaen, starter vi på 40kr. Dette svarer til vores b-værdi, som er skæring med y-aksen. Vi betaler altså 40kr, selvom vi har kørt 0 km. Derfor skal vi huske, at funktionen skal starte på 40 på y-aksen, og derefter vokse 20kr pr. km.



Vi har nu lavet en funktionsforskrift for den rette linje, som hedder:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = 20x + 40$$

Vi skal huske, at a-værdien beskriver væksten på y-aksen når vi går 1 hen af x-aksen. Hvis vi fik informationen 60kr. per 3 km, er hældningen ikke 60, da vi her får at vide, at vi går 60 op ad y-aksen, når vi går 3 hen på x-aksen. Her skal vi omformulere informationen, til at vise hvor meget vi går op på y-aksen, når vi kun går 1 hen, og ikke 2, eller 5, eller noget andet.

Når vi løser opgaver hvor vi skal opstille en funktion eller finde a- og b-værdierne, skal vi altid kigge efter disse typer af informationer. Altså, hvor meget går vi op ad y-aksen, når vi går 1 hen ad x-aksen og eventuelle startværdier.

Find a-værdien ud fra 2 punkter

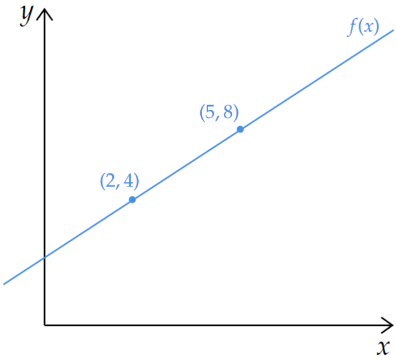
Tit har vi brug for, at finde a-værdien (hældingen) for en lineær funktion. Der er flere måder at gøre det på, og det kommer helt an på hvilken information vi har, men typisk har vi fået 2 punkter, hvor vi ud fra disse punkter skal bestemme a-værdien. Her er den formel som vi bruger, som sjovt nok hedder ”2-punktsformlen”. Hvis vi har 2 punkter,

$$(x_1, y_1) \; og \; (x_2, y_2)$$

der ligger på funktionen, kan vi finde a-værdien med formlen:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Formlen fortæller altså, at vi skal finde forskellen mellem de 2 punkters y-værdier, og dividere det med forskellen mellem x-værdierne. Lad os tage et eksempel:



Her kan vi se, at vi har 2 punkter på grafen.

$$(2, 4)\, og\, (5, 8)$$

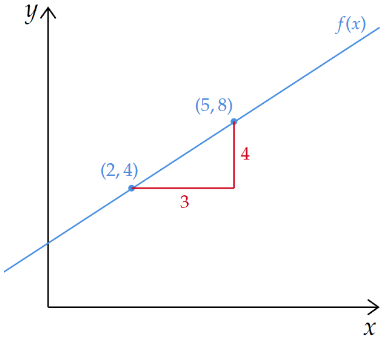
Her svarer 2 til x_1, 4 til y_1, 5 til x_2 og 8 til y_2. Alt vi gør nu, er at indsætte tallene i formlen:

$$a = \frac{8 - 4}{5 - 2} = 1.3\overline{3}$$

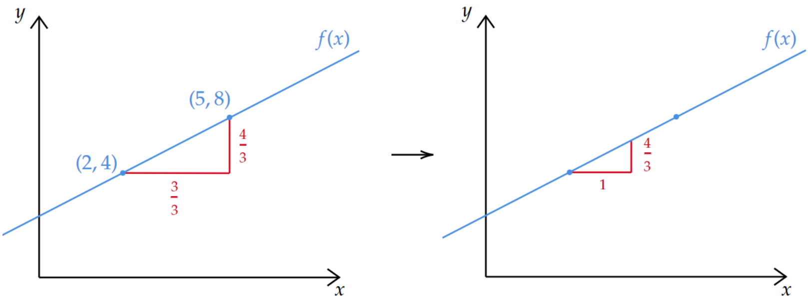
Vi har altså fundet ud af, at med disse 2 punkter er hældningen $1.3\overline{3}$.

Hvorfor ser 2-punktsformlen sådan ud?

Hvorfor ser formlen sådan ud? Vi vil jo gerne finde ud af hvor meget vi går op af y-aksen, når vi går 1 hen på x-aksen (altså a-værdien).



I eksemplet så vi, at vi gik 4 op ad y-aksen når vi går 3 hen ad x-aksen. Vi skal jo finde ud af hvor meget vi går op af y-aksen, når vi kun går 1 hen ad x-aksen. Derfor dividerer vi 4 med 3. Se det som om, at vi skalerer det hele ned fordi vi skal finde ud af, hvor meget vi går op af y-aksen når vi kun går 1 hen ad x-aksen, og ikke 3. Det kan vi altså gøre ved at dividerer med 3, fordi 3 divideret med 3 er 1. Det betyder selvfølgelig også, at vi skal dividerer 4 med 3.



$$\frac{4}{3} = 1.3\overline{3}$$

Det vi gjorde var egentlig bare at skalere den her trekant ned, så vi får 1 hen ad x-aksen, og ikke 3

For at finde hældningen, tog vi egentlig og divideret forskellen mellem de 2 y-værdier, som i vores eksempel var 4, med forskellen mellem x-værdierne, som i vores eksempel var 3.
Det vil sige, at for at finde hældningen skal vi dividerer forskellen

mellem y-værdierne med forskellen mellem x-værdierne, altså:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Det er sådan formlen er kommet frem.

Nogle gange ser du måske at formlen står som

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Men dette Delta-tegn (Δ) er bare et tegn vi bruger til at indikere en forskel mellem 2 ting. Her er det forskellen i x divideret med forskellen i y.

Hvordan vi finder b-værdien

Alt vi skal gøre for at finde b-værdien, er at isolere den i forskriften for en lineær funktion:

$$y = ax + b$$

Vi trækker ax fra på begge sider, og får:

$$y - ax = b$$

For at finde b, skal vi altså kende hældningen og (x, y), som er et vilkårligt punkt, der ligger på grafen. Hvis vi tager eksemplet fra før hvor vi har a-værdien og 2 punkter, kan vi finde b-værdien. Her har vi faktisk 2 punkter at gøre godt med, men vi kan sagtens bare nøjes med 1. Vi vælger selv hvilket punkt vi bruger. Jeg tager det første punkt. Så indsætter vi det egentlig bare i formlen vi lige har lavet:

$$b = y - ax$$

$$b = 4 - 1.3\overline{3} \cdot 2$$

$$b = \frac{4}{3}$$

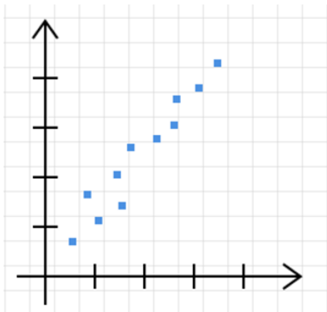
Vi har nu fundet b-værdien og kan faktisk opstille hele funktionsforskriften.

$$y = ax + b$$

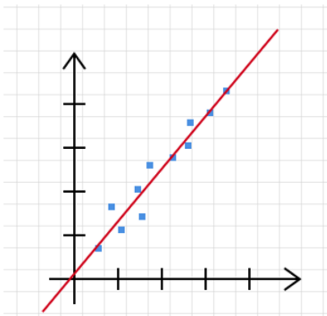
$$y = 1.3\overline{3}x + \frac{4}{3}$$

Lineær regression

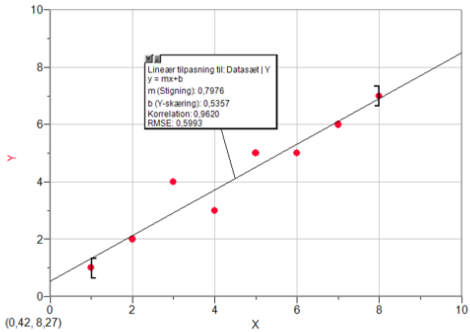
Lineær regression er en måde, hvorpå vi kan danne en funktionsforskrift ud fra nogle givne punkter. Vi får typisk et program til at lave forskriften, da det er lidt besværligt at lave i hånden.



Lad os sige, at vi fik givet disse punkter, der viser sammenhængen over et eller andet. Det kunne være pris pr. km hvis vi sidder i en taxa, eller afstand pr. sekund hvis vi kører i en bil eller lign. Vi vil nu gerne finde en ret linje, der beskriver disse punkter bedst muligt. Det er her vi bruger lineær regression. Nemlig til at finde den rette linje, der passer bedst til disse punkter. På den måde kan vi komme med et kvalificeret bud på, hvordan fremtiden kommer til at se ud. Med vores CAS-værktøj (Maple, Wordmat, TI-Nspire, LoggerPro etc.) kan vi lave en ret linje, der bedst beskriver punkterne.



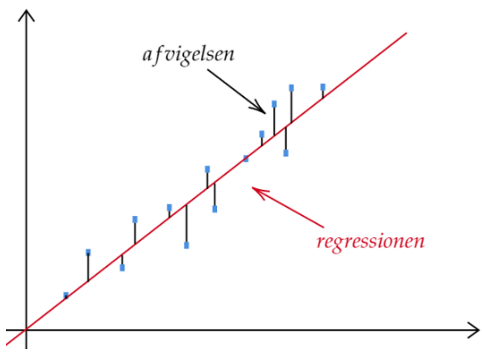
Det kunne være den rette linje så således ud. Vi har nu fra vores CAS-værktøj fået en ret linje med en a og b værdi, der bedst muligt beskriver disse punkter (der står i CAS-værktøjet hvad a- og b-værdierne er).



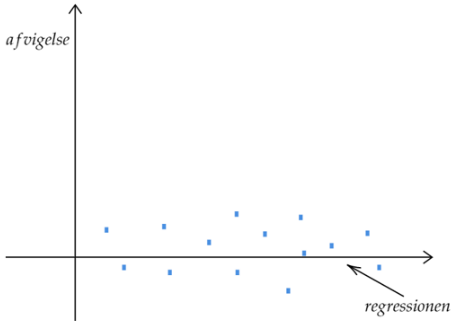
Men hvordan kan vi vide hvor godt den egentlig beskriver punkterne? Hvad hvis der faktisk ikke var en lineær sammenhæng mellem punkterne? For at vurdere, hvor godt vores lineære regression passer til punkterne, bruger vi et residualplot.

Residualplot

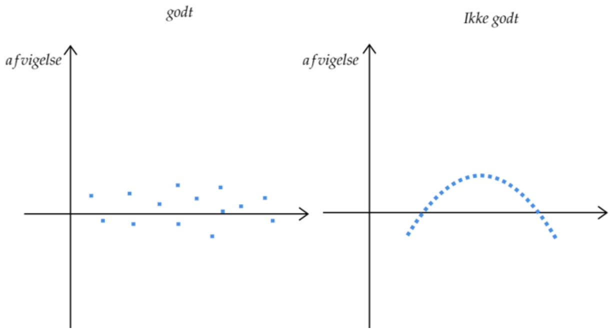
Et residualplot bruger man til at vurdere, hvor godt ens lineære regression passer til punkterne. Her går man ind og kigger på forskellen mellem punkterne og linjen.



Når vi plotter disse forskelle samt den lineære regression, kigger vi på om punkterne ligger "tilfældigt". Med det menes der, at punkterne ikke klumper sammen eller former et andengradspolynomium eller lign. Så ville vores regression ikke passe godt. Jo mindre disse afstande fra punkt til regression er, jo bedre er det selvfølgelig, da vi så ville have en linje der ligger meget tæt på de rigtige punkter.



Dette residualplot ser fint ud, da vi har noget der ser tilfældigt ud, og samtidig også ligger spredt.



Der findes mange typer af regressioner, så det kan sagtens være at du ikke skal bruge lineær regression i en bestemt situation. Måske vokser denne situation slet ikke lineært, men eksponentielt eller som en anden type.

Forklaringsgraden

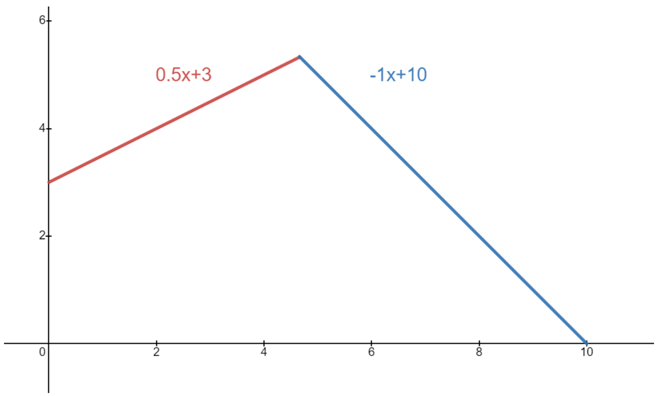
Så hvordan vurderer vi så, hvor god en regression er? Altså hvor godt beskriver den model vi har opstillet vores situation? Jo, vi har jo vores residualplot, men der er faktisk en værdi der kan fortælle os det. Dette er ikke en vi selv skal regne ud, men en som vores CAS-værktøj giver os. Den værdi kalder vi for forklaringsgraden eller R^2-værdien. Denne værdi vil vi gerne have så tæt på 1 som overhovedet muligt. Jo tættere jo bedre. Denne værdi kan netop fortælle os, hvor god vores regression er.

En forklaringsgrads på 1 er selvfølgelig optimal, men i langt de fleste opgaver hvor du skal bruge regression, kommer du ikke til at få en forklaringsgrad på 1. Den kommer sikkert til at ligge på 0.97-0.99, hvilket er en rigtig god forklaringsgrad. Så længe den ligger over 0.95, er det en acceptabel regression. Det er faktisk også den standart man bruger i fysik og kemi.

Hvis du får en opgave med regression, og måske skal fortælle om regressionen passer eller ej, kigger vi næsten altid på forklaringsgraden. Har vi med en lineær regression at gøre, og forklaringsgraden måske ligger på 0.98, kan vi sige, at ”der er en lineær sammenhæng i vores situation”. På den måde kan vi finde ud af, om vores modeller passer til vores data og situation.

Stykvise lineære funktioner

En stykvis lineær funktion er egentlig bare 2 lineære funktioner vi har sat sammen. Grafen for stykvis lineær funktion kunne se sådan her ud:



Når vi skal beskrive sådan en samlet funktion, gør vi det ved hjælp af det vi kalder en ”gaffel forskrift”. Det er egentig bare en samling af de 2 funktioner og deres intervaller. Lad os se på, hvordan den stykvise funktion på grafen kan skrives med en gaffelforskrift:

Den første del, altså funktionen

$$0.5x + 3$$

er i intervallet:

$$0 \leq x < 4.66$$

Den går nemlig til 4.66 før den anden funktion ”tager over”. Den anden funktion har forskriften

$$-1x + 10$$

og går i intervallet

$$4.66 \leq x \leq 10$$

Denne funktion går altså fra 4.66 til og med 10.

De her to intervaller sammen med funktionerne kan vi skrive i en samlet pakke, som vi kalder en gaffelforskrift. Den ser sådan her ud:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x + 3 & 0 \leq x < 4.66 \\ -1x + 10 & 4.66 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Her har vi de 2 mindre funktioner og deres interval. Hele funktionen, som vi her kalder $f(x)$ kan vi beskrive med denne sammensætning af de to mindre funktioner. En gaffelforskrift er altså bare en måde at let opstille en stykvis funktion. Grunden til det hedder en ”stykvis” funktion, er fordi funktionen er delt op i mindre stykker, som her i vores eksempel er to mindre funktioner.

find punkter på stykvise lineære funktioner

Hvis vi for eksempel skulle finde punktet $f(3)$, altså y-værdien når x er 3, skal vi bare finde ud af, hvilken af de 2 mindre funktioner, vi har med at gøre. Vi skal jo finde y-værdien når x er 3, så vi finder den funktion, hvor 3 er med i intervallet. Den første funktion går fra 0 til 4.66, så det er den vi skal have fat i

$$0.5x + 3$$

Alt vi gør er at indsætte 3 på x's plads, som vi normalt plejer at gøre når vi finder y-værdier. Så får vi

$$f(x) = 0.5 \cdot 3 + 3$$

$$f(x) = 4.5$$

Alt du gør, er at finde ud af, hvilket interval, som x-værdien vi skal bruge, ligger i.