慶應義塾大学ビジネス・スクール

回帰分析シリーズ2

— 重回帰分析 —

基本的に回帰モデルに説明変数が2つ以上含まれる重回帰分析も、その仮定や条件、計算方法は単回帰分析の場合とほとんど同じである。まず、2つの説明変数が含まれる線形関数を考えてみる。

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

この場合にも単回帰と同様に、誤差項 (u_i) の分布についていくつかの仮定をおくことになる。まず u_i は平均値がゼロ、分散は均一、自己相関はない、さらに確率分布は正規分布にしたがうというものである。この (1) 式には β_1、β_2、β_3 という3つの未知数が含まれているため、これらの推定を行うことから分析はスタートする。そして、推定値をそれぞれ b_1、b_2、b_3 に、また誤差項も u_i から推定誤差である e_i に置き換えるものとする。

$$Y_i = b_1 + b_2 X_{2i} + b_3 X_{3i} + e_i \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{2}$$

単回帰と同様に、(2) 式に最小二乗法を適用するには、未知数 b_1、b_2、b_3 について (3) 式を偏微分すればよい。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_1 - b_2 X_{2i} - b_3 X_{3i})^2 \tag{3}$$

その必要条件は (4) 式である。

$$\frac{\partial(\Sigma e^2)}{\partial b_1} = \frac{\partial(\Sigma e^2)}{\partial b_2} = \frac{\partial(\Sigma e^2)}{\partial b_3} = 0 \tag{4}$$

この (4) 式を解けば次の3つの正規方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= n b_1 + b_2 \Sigma X_2 + b_3 \Sigma X_3 \\ \Sigma X_2 Y &= b_1 \Sigma X_2 + b_2 \Sigma X_2^2 + b_3 \Sigma X_2 X_3 \\ \Sigma X_3 Y &= b_1 \Sigma X_3 + b_2 \Sigma X_2 X_3 + b_2 \Sigma X_3^2 \end{aligned} \tag{5}$$

さらに (5) 式の最初の方程式を n で割れば、推定線が変数の平均点 $(\bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{Y})$ を通ることが分かる。

$$\bar{Y} = b_1 + b_2 \bar{X}_2 + b_3 \bar{X}_3 \tag{6}$$

このノートは、慶應義塾大学ビジネス・スクールにおける補助教材として、同ビジネス・スクール教授矢作恒雄と博士課程磯辺剛彦が作成した。（1995年5月作成）