Inhalt

Vorwort

Dieses 136 Seiten starke Lernheft führt dich durch die relevanten Inhalte der Veranstaltung *Stochastik 1* für Lehramt. Dabei steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik“ kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln, anstatt sie mit Faszination zu entdecken. Wenngleich das folgende Zitat des berühmten Mathematikers Georg Cantor in vielerlei Hinsicht Interpretationsspielraum bietet, nutzen wir es für hier:

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit!

Dieses Lernheft stellt somit eher einen alternativen Zugang zu den Themen dar. Wir sind der Meinung, dass auf dem Verständnis der grundsätzlichen, inhaltlichen Zusammenhänge der Themengebiete aufgebaut werden kann, um den Sinn hinter allen mathematischen Notationen zu begreifen. In Vorlesungen wird üblicherweise der genau gegenteilige Weg eingeschlagen. Man könnte sagen, wir stellen die berühmte *andere Seite der Medaille* dar.

Zusätzlich zu den abgedruckten Erläuterungen und Beispielen findest du an den Seitenrändern insgesamt 105 QR-Codes zu Daniel Jungs Mathe Erklärvideos; direkt auf die jeweiligen Themen abgestimmt. Damit erhältst du zusätzliche Erklärungen, die du in deinem eigenen Tempo so oft ansehen kannst, wie du willst.

Am Ende jedes Kapitels sind Übungsaufgaben zu finden (insgesamt 86 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst. Dabei sind folgende Schwierigkeitsstufen zu finden:

Level: Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 21 Aufgaben.**

Level: Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 54 Aufgaben.**

Level: Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 11 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung. Die ausführlichen Lösungen zu den Aufgaben findest du auf unserer Webseite, die über den jeweils angegebenen QR-Code zu erreichen ist.

Sollten sich doch mal Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an dem Lernheft. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der *Stochastik 1* Veranstaltung.

Feedback

— Dr. Andreas Stahl

1 Basics

1.1 Mengen

1.1.1 Wiederholung: Definition und elementare Eigenschaften von Mengen

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf das mathematische Objekt „Menge" ein und beschreiben die wichtigsten Mengenoperationen. Nach der Definition von *Georg Cantor* ist eine Menge eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Das bedeutet, dass wir jegliche Objekte in einer Menge zusammenfassen können und so auch eine Menge erhalten, wenn wir die einzelnen Objekte unterscheiden können. Diese beschreiben wir konventionsgemäß mit geschweiften Klammern. Beispielsweise sind

Definition

Schreibweisen

- $A = \{$rot, blau, grün, gelb$\}$
- $B = \{$groß, klein, stark, schwach$\}$
- $C = \{1, 2, 3, 4\}$
- $D = \{$grün, 2, π, $\sqcap$, qprt$\}$
- $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$

jeweils Mengen. Dabei ist es unerheblich, ob sich in dieser Menge Farben, Zahlen oder auch auf den ersten Blick unlogische Zeichen oder Textfolgen befinden. Hingegen sind

- $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 0\}$
- $H = \{$groß, klein, sehr klein, winzig, riesig, groß, gigantisch$\}$

keine Mengen, da sie jeweils zwei ununterscheidbare Elemente beinhalten. In der Menge G ist zweimal das Element „0" zu finden und in der Menge H tritt das Element „groß" häufiger auf. Für solche Objekte gibt es verschiedene Rechenoperationen, welche wir in folgender Tabelle beschreiben:

Regeln (1)

Mengen-operation	Bedeutung
$\emptyset$	Beschreibt die leere Menge, die keine Elemente enthält.
$x \in M$	Beschreibt, dass ein Element x in einer Menge M enthalten ist.
$x \notin M$	Beschreibt, dass ein Element x nicht in einer Menge M enthalten ist.
$M \subset N$	Beschreibt die Teilmengeneigenschaft. M ist also eine Teilmenge der Menge N und somit sind alle Mengen von M auch in N enthalten.

Regeln (2)

Regeln (3)

Somit treffen wir alle Elemente in $\mathbb{Z}$ und Z ist damit abzählbar, es gibt genau so viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen. Wir schreiben auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Selbst für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ fand der Mathematiker *Georg Cantor* eine Abbildung mittels eines Diagonalverfahrens und konnte zeigen, dass $\mathbb{Q}$ ebenfalls abzählbar unendlich ist. Für die reellen Zahlen konnte er nachweisen, dass solch eine Abbildung nicht existiert, daher sind diese überabzählbar.

Intervalle

Weiter wiederholen wir in diesem Abschnitt noch die reellen Intervalle als Mengen, da diese im Laufe der verschiedenen Thematiken häufig auftauchen werden. Es gilt:

Intervall	**Bedeutung**
(a,b)	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a < x < b$
$[a,b)$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a \leq x < b$
$(a,b]$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a < x \leq b$
$[a,b]$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a \leq x \leq b$

1.2 Grundbegriffe der Stochastik

1.2.1 Die σ-Algebra

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einem System von Mengen, welches für fast jeden Satz der Stochastik im Hinter- oder Vordergrund zu finden ist:

> Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge und $\mathscr{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge.
>
> Wir bezeichnen ein Mengensystem $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ als σ**-Algebra**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
>
> 1. Die Grundmenge Ω ist im Mengensystem enthalten:
> $$\Omega \in \mathscr{A}$$
> 2. Das Mengensystem ist stabil unter Komplementbildung. Das bedeutet, dass folgende Implikation gilt:
> $$\forall B \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad B^c \in \mathscr{A}$$
> Dabei ist $B^c = \Omega \backslash B$.
> 3. Das Mengensystem ist stabil unter abzählbarer Vereinigung. Das bedeutet, dass für jede Familie von Mengen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Implikation gilt:
> $$B_1, B_2, \ldots \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{A}$$

Aus der Definition einer σ-Algebra können wir direkt weitere gültige Aussagen ableiten.

3 Die Zufallsvariable

3.1 Definition von Zufallsvariablen

Oft ist man an den Ausgängen komplexerer Experimente in der realen Welt interessiert. Diese Komplexität wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit den sogenannten Zufallsvariablen modelliert, welche zunächst eine Abbildung des Ergebnisraums in einen Messraum vornehmen.
Wir definieren:

Zufallsgröße (1)

Zufallsgröße (2)

> Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathscr{A}')$ ein Messraum. Eine Abbildung
>
> $$\begin{aligned} X : \Omega &\to \Omega' \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$
>
> heißt $\mathscr{A} - \mathscr{A}'-$**Zufallsvariable**, wenn für alle $A' \in (A')$ die Eigenschaft
>
> $$X^{-1}(A') \in \mathscr{A}.$$
>
> Wir schreiben für Zufallsvariable abkürzend **ZV** und mathematisch
>
> $$X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}').$$
>
> Ist $\Omega' = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A}' = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, so sprechen wir von einer **reellen Zufallsvariable**.

Im Folgenden halten wir erste Eigenschaften für Zufallsvariablen fest. Es gilt:

1. Sind X und Y reelle Zufallsvariablen, so sind auch $X + Y$ und $X - Y$ reelle Zufallsvariablen.
2. Sind X und Y reelle Zufallsvariablen, so sind auch $\min(X, Y)$ und $\max(X, Y)$ reelle Zufallsvariablen.
3. Seien $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}')$ und $Y : (\Omega', \mathscr{A}') \to (\Omega'', \mathscr{A}'')$ Zufallsvariablen, so ist auch

   $$X \circ Y = Y(X)$$

   eine Zufallsvariable mit

   $$X \circ Y : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega'', \mathscr{A}'').$$

4. Ist X eine reelle Zufallsvariable und f eine messbare reelle Abbildung, so ist $f(X)$ ebenfalls eine Zufallsvariable.

Sei X eine stetige Zufallsvariable. Die **stetige Verteilungsfunktion** bezüglich der Zufallsvariable X definieren wir durch

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Besitzt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte f, so gilt

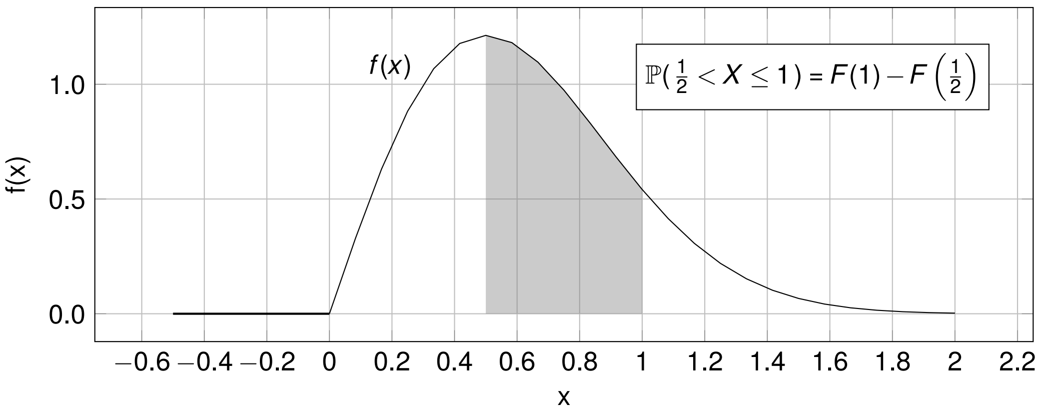
$$\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Beziehungsweise somit die Eigenschaften

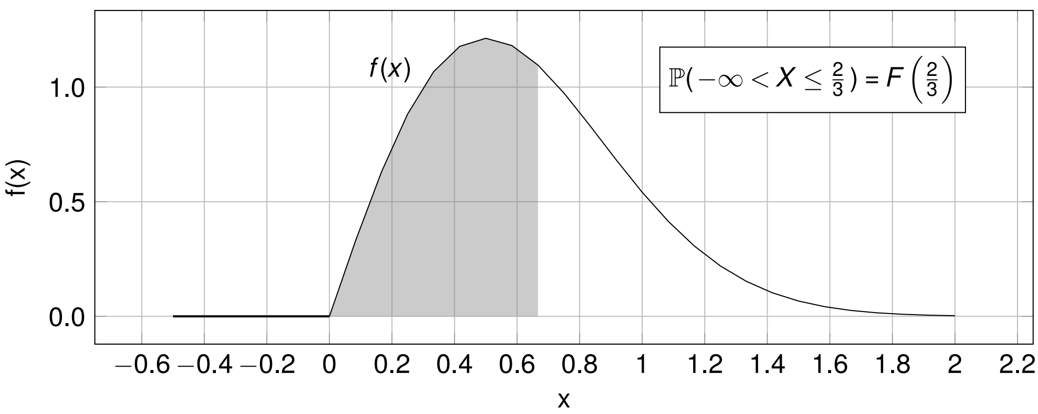
$$\begin{array}{lcccc} \text{i)} & \mathbb{P}(a < X \leq b) & = & F_X(b) - F_X(a) & = & \int_a^b f(x)\, dx \\ \text{ii)} & \mathbb{P}(-\infty < X \leq t) & = & F_X(t) & = & \int_{-\infty}^t f(x)\, dx \\ \text{iii)} & \mathbb{P}(X > t) & = & 1 - F_X(t) & = & \int_t^\infty f(x)\, dx. \end{array}$$

Graphisch lassen sich obige Zusammenhänge folgendermaßen anhand von Beispielen darstellen. In jeder Skizze ist der Graph einer Wahrscheinlichkeitsdichte eingetragen und die grau hinterlegte Fläche visualisiert das Integral:

i):



ii):



Mit Hilfe der Gesamtwahrscheinlichkeit E und der Formel von Bayes erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B \mid E)$, dass ein Studierender mit erfolgreichem Examen auf Lehramt studiert hat:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid E) &= \frac{\mathbb{P}(E \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(E)} \\ &= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}35}{0{,}5575} \\ &\approx 31{,}39\%.\end{aligned}$$

3.6 Aufgaben

Lösungen

Aufgabe 20: (Level:)
Bestimme, ob es sich bei den folgenden Funktionen um Zähldichten handelt.

a) $f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{1}{5}$ und $f(2) = \frac{1}{2}$

b) $f : \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$

c) $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f(2) = -\frac{1}{4}$, $f(3) = \frac{1}{4}$, $f(4) = \frac{1}{4}$ und $f(5) = \frac{1}{4}$

Aufgabe 21: (Level:)
Weise nach, dass es sich bei der Funktion mit $f : \{0, ..., n\} \to [0,1]$ mit

$$f(k) = \frac{2 \cdot k}{n \cdot (n+1)}$$

um eine Zähldichte handelt.

Aufgabe 22: (Level:)
Sei mit $f : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{R}$ und $f(k) = \dfrac{k^2}{30}$ eine Zähldichte zu einer Zufallsvariable X gegeben.
Berechne:

a) $f(1)$

b) $\mathbb{P}(X = 4)$

c) $\mathbb{P}(X \in \{2,3\})$

Warum kann die 30 im Nenner nicht weggelassen werden?

Aufgabe 23: (Level:)
Sei X eine Zufallsvariable. Wir werfen eine Münze und einen Würfel. X ergibt bei „Kopf“ die gewürfelte Augenzahl mit dem Faktor 2 multipliziert und bei „Zahl“ die Augenzahl um 1 erhöht.

a) Welche Werte kann X annehmen?

b) Bestimme die Zähldichte von X.

Aufgabe 24: (Level:)
Bestimme, ob es sich bei den folgenden Funktionen um diskrete Verteilungsfunktionen handelt und begründe jeweils deine Entscheidung.

An dieser Stelle fällt auf, dass bei der Gesamtzahl der Versuche bereits r Erfolge enthalten sind und die Wahrscheinlichkeit, die r Erfolge in weniger als r Versuchen zu erreichen, stets 0 sein muss, sodass die zweite Summe bei $n = r$ startet.

Für das zweite Modell ist $f(n)$ durch die Definition des Binomialkoeffizienten tatsächlich gleich 0 für jedes $n < r$, da in diesem Fall gilt:

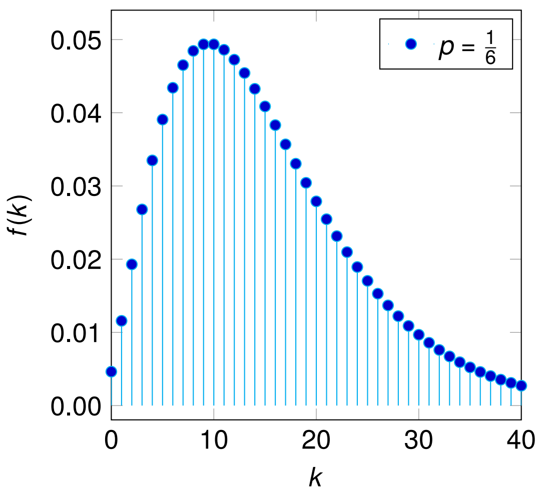
$$\binom{n-1}{r-1} = 0$$

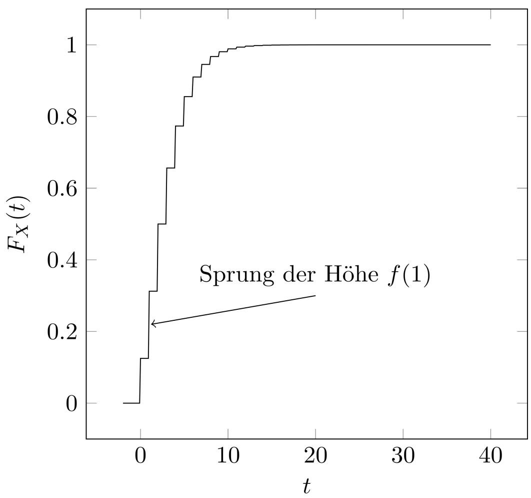
Beispiel: Negative Binomialverteilung (1)
Betrachten wir als Beispiel folgende Problemstellung. Wir werfen einen fairen Würfel und definieren das Würfeln einer 6 als Erfolg sowie alle anderen Fälle als Misserfolg. In einem Spiel benötigen wir zum Start drei 6-en. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau zwei Misserfolge zu würfeln?

Da die Misserfolge im Vordergrund stehen, benutzen wir die erste Variante der negativen Binomialverteilung und betrachten die Zufallsvariable $X \sim NB(r,p)$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt $p = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(\text{„Wurf einer 6“})$ und die Anzahl der Erfolge r beträgt $r = 3$. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für zwei Misserfolge durch

$$f(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} \approx 0{,}01929.$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei drei 6-en zwei Fehlwürfe zu haben, beträgt nur 1,929%. Im Folgenden stellen wir die Zähldichte und die Verteilungsfunkion visuell dar.





Auf dem linken Bild ist die Zähldichte abgebildet und wir erkennen die Abstände zwischen den Punkten, da es sich um eine diskrete Verteilung handelt. Außerdem sehen wir, dass Fehlversuche im Bereich von 4 – 20 am wahrscheinlichsten sind, während sich die Wahrscheinlichkeit für 30 und mehr Fehlversuche immer näher der 0 nähert. Außerdem können wir eine Linksschiefe feststellen, da sich mehr Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite sammelt und wir somit eine positive Schiefe $v(X)$ erwarten.

Und schlussendlich erhalten wir die Wahrscheinlichkeit mit der gleichen Betragsumformung wie oben durch

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{1200} X_k - 1200 \cdot \frac{1}{6}\right| < 50\right) \overset{\text{Tschebyscheff}}{\geq} 1 - \frac{1200 \cdot Var(X_1)}{50^2} = 1 - \frac{1200 \cdot \frac{5}{36}}{2500} = 1 - \frac{14}{15} \approx 93{,}33\%.$$

Beispiel: Tschebyscheff-Ungleichung (3)
Als drittes Beispiel untersuchen wir eine Aufgabenstellung, die auf den ersten Blick nicht mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung gelöst werden kann, aber so gestellt ist, dass die Abschätzungen in der „richtigen Richtung" nacheinander angewendet werden können.

Wir betrachten den 1080-fachen Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels und werten den Wurf einer 6 als Erfolg. Wir sollen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit zwischen 100 und 250 Mal die 6 zu würfeln mindestens 96% beträgt.

Wie in den letzten Beispielen benötigen wir zunächst den Erwartungswert und die Varianz. Das 1080-fache Werfen eines sechsseitigen Würfels kann durch eine Zufallsvariable $X \sim \mathscr{B}\left(1080, \frac{1}{6}\right)$ modelliert werden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 1080 \cdot \tfrac{1}{6} &&= 180 \\ \text{und} \quad Var(X) &= 1080 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{6}\right) &&= 150. \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{100 < X < 250\}$ ist <u>nicht</u> symmetrisch um den Erwartungswert, aber wir können eine Abschätzung tätigen, sodass es symmetrisch wird:

$$\mathbb{P}(100 < X < 250) \geq \mathbb{P}(110 < X < 250)$$

Indem wir die untere Grenze nach oben „korrigieren", verkleinern wir die Wahrscheinlichkeit, da wir nur eine Teilmenge des eigentlichen Ereignisses betrachten. Für diese Wahrscheinlichkeit folgt mit Tschebyscheff

$$\mathbb{P}(110 < X < 250) = \mathbb{P}(|X - 180| < 70) \geq 1 - \frac{Var(X)}{70^2} = 1 - \frac{150}{4900} \approx 0{,}9694 = 96{,}94\%.$$

5.3 Die Gesetze der großen Zahlen

Gesetz der großen Zahlen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den sogenannten Gesetzen der großen Zahlen. Diese untersuchen Konvergenzen der Mittelwerte von Zufallsvariablen und beschreiben den Sachverhalt, dass sich Experimente - bei hinreichender Wiederholung - immer näher an die tatsächliche Verteilung annähen. Der Unterschied der Gesetze besteht insbesondere in der Stärke ihres Konvergenzbegriffs. Zunächst definieren wir:

> Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X_n sowie X reelle Zufallsvariablen. Wir sagen, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **stochastisch** gegen X konvergiert, wenn
>
> $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$
>
> In diesem Fall schreiben wir $X_n \xrightarrow{p} X$.