Inhalt

Vorwort

Wir freuen uns, dass du dich für das dritte Heft unserer Reihe zur Technischen Mechanik entschieden hast. Das Heft soll dich prägnant, verständlich und schnell in alle wichtigen Grundlagen zur Kinematik und Kinetik einführen. Dafür findest du neben dem Text QR-Codes, die dich zu Videos mit Beispielen und vertiefenden Erklärungen führen, die du dir immer wieder anschauen kannst.

Überblick

Rückblick: Den wir nicht brauchen

Bisher haben wir in der Mechanik Kräfte in starren Körpern berechnet, die sich nicht bewegen (*Statik* in der Technischen Mechanik 1) und dann je nach Geometrie, Belastungsart und Werkstoff daraus Spannungen und Sicherheiten von Systemen berechnet (*Festigkeitsberechnung* in der Technischen Mechanik 2).

Diese Themenstellungen haben mit *Dynamik* wenig zu tun. Im Verlauf dieses Heftes werden wir wieder zu Kräften zurückkommen (ohne die geht in der Mechanik wenig bis nichts). Wir können Bewegungen jedoch zunächst einmal ohne Kräfte beschreiben. Kräfte spielen in der Dynamik erst dann eine Rolle, wenn sie sich nicht gegenseitig aufheben und eine Beschleunigung des Systems verursachen.

Die Begriffe der Statik von *statischer Bestimmtheit* über *Auflagerreaktionen* bis zu *Schnittgrößen* und den daraus abgeleiteten Spannungen aus der Festigkeitsberechnung werden wir hier nur ab und zu und am Rande streifen. Im Grunde ist die Dynamik innerhalb der Mechanik eine losgelöste Thematik.

Insofern ist es nur sinnvoll, sich nicht lange mit einem Rückblick aufzuhalten und direkt mit dem ersten Kapitel zu starten!

Marius	Dominik	Philipp
Marius	Dominik	Philipp

1 Einleitung: Die kinematischen Größen

In diesem Kapitel lernst du ...

- was der Unterschied von Kinematik und Kinetik ist,
- mit welchen Größen wir die Bewegung von Körpern beschreiben und
- wie sich Größen beim Wurf einer Masse als klassische Klausuraufgabe berechnen lassen.

Zu Beginn der Dynamik müssen wir ein paar Begriffe definieren. Dazu gehört die Frage, für welchen Bereich der Dynamik eigentlich Kräfte entscheidend sind und welcher Bereich ohne Kräfte auskommt (Kapitel 1.1). Hinzu kommen die sogenannten kinematischen Größen, die wir im Verlauf des Heftes immer wieder brauchen werden (Kapitel 1.2).

1.1 Kinematik und Kinetik

Wenn ein Ball durch die Luft fliegt, können wir diese Bewegung auf zwei Arten beschreiben: durch die Flugbahn oder durch die wirkenden Kräfte und Momente. Zunächst einmal bewegt sich der Ball auf einer bestimmten Bahn durch die Luft. Diese Beschreibung der Bewegung eines Körpers (es kann zunächst auch ein Massenpunkt sein), ist Thema der Kinematik (von altgri. „kinema“).

Die Frage des Zusammenhangs von Kräften und der Bewegung eines Körpers wird in der Kinetik (neugri. Wort für Bewegung) behandelt. An dem Alter der Begriffe Kinematik und Kinetik wird schon ersichtlich, wie viel älter die Kinematik ist.

- **Kinematik**: Geometrie der Bewegung
- **Kinetik**: Bewegung unter Einwirkung von Kräften und Momenten

Kinematik arbeitet mit drei kinematischen Grundgrößen, die wir uns im nächsten Abschnitt anschauen.

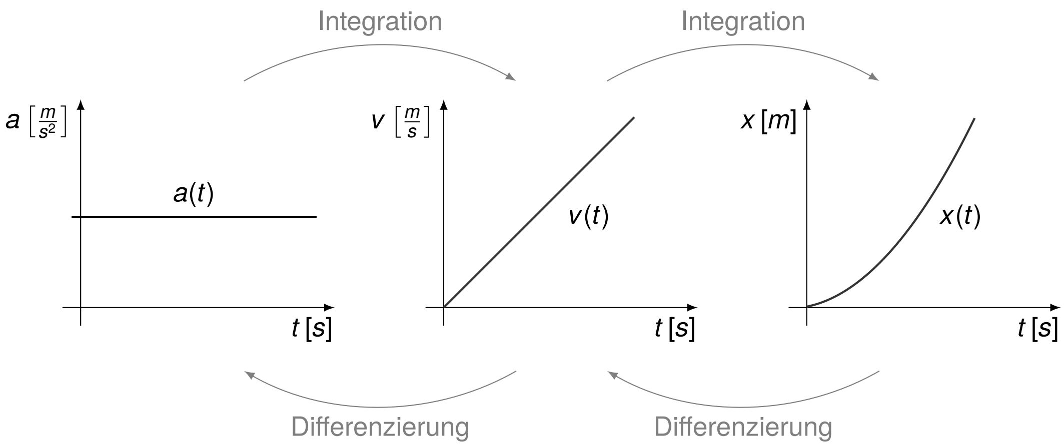


Abbildung 1.1: Zusammenhang kinematischer Grössen

In dem nebenstehenden Video fassen wir die Beziehung der kinematischen Größen noch einmal zusammen.

Zusammenhang von a, v und x

Aus diesen Überlegungen lassen sich bereits Aufgaben ableiten. Bevor wir das erste Beispiel lösen, gilt es bei der Integration von Beschleunigung und Weg etwas zu beachten.

Die Integration erfolgt in den folgenden Aufgaben immer unbestimmt, es müssen also Konstanten berücksichtigt werden.

Beispiel:
Ein Auto A fährt konstant mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wie lautet die Wegfunktion?

$$x_A(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,\mathrm{d}t = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + C$$

Die bei der Integration entstehende Konstante C muss anhand von Randbedingungen berücksichtigt werden. Das ist wichtig, wenn etwa Aufgaben mit sich überholenden Fahrzeugen und im Vorhinein bekanntem Abstand gelöst werden.

Ein zweites Auto B setzt zum Überholen an. Es fährt konstant mit einer Geschwindigkeit von 65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und hat zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Abstand von 100 m.
Wie lautet die Wegfunktion?

$$x_B(t) = 65\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 0{,}1\ \text{km}$$

Nach welcher Zeit überholt Auto B Auto A?

$$\begin{array}{rrcll}
 & x_A(t) & \overset{!}{=} & x_B(t) & \\
\Rightarrow & 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t & = & 65\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 0{,}1\ \text{km} & \mid -65\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \\
\Leftrightarrow & -15\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t & = & -0{,}1\ \text{km} & \mid :\left(-15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \\
\Leftrightarrow & t & = & \frac{-0{,}1\ \text{km}}{-15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{150}\ \text{h} = 24\ \text{s} &
\end{array}$$

Einsetzen von (1.1) in (1.2) liefert: $a(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{2\,\ell}\right) \mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}v$

Durch die Integration beider Seiten erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} a_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{2\,\ell}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^{v} v\,\mathrm{d}v \\ \Rightarrow \quad a_0 \cdot \left(x - \frac{x^2}{4\,\ell}\right) \bigg|_0^{\ell} = \frac{3}{4}\,a_0\,\ell &= \frac{1}{2}\,v^2 \end{aligned}$$

Da die Geschwindigkeit gesucht wird, stellen wir die Gleichung nun noch nach v um und erhalten:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,v^2 &= \tfrac{3}{4}\,a_0\,\ell && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad v^2 &= \tfrac{3}{2}\,a_0\,\ell && \mid \sqrt{\ } \\ \Rightarrow \quad v &= \sqrt{\tfrac{3}{2}\,a_0\,\ell} \approx 173{,}21\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Nach diesem Beispiel schauen wir uns im nächsten Abschnitt eine sehr praktische Anwendung der Kinematik an: den schrägen Wurf.

1.4 Der schräge Wurf

Schräger Wurf

Der schräge Wurf ist nur ein Beispiel für das, was wir allgemein die räumliche Bewegung des Massenpunktes nennen. Ein Ball, vereinfacht zu einer Punktmasse (das vereinfacht Vieles, wie wir später sehen werden), wird unter einem Winkel α und einer Abwurfgeschwindigkeit v_0 in den Himmel geschleudert. In dieser Situation stellen sich einige Fragen:

- Wie weit fliegt der Ball?
- Wie hoch fliegt der Ball?
- Wie lange fliegt der Ball?

Die Situation des Ballwurfs ist exemplarisch in Abbildung 1.2 dargestellt.

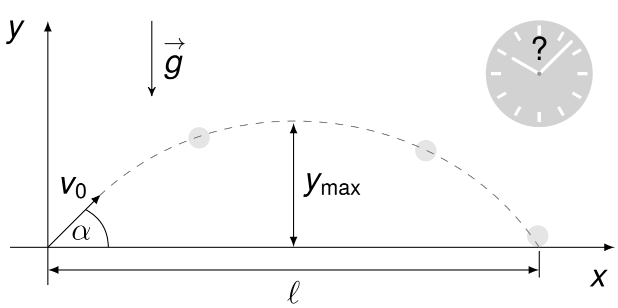


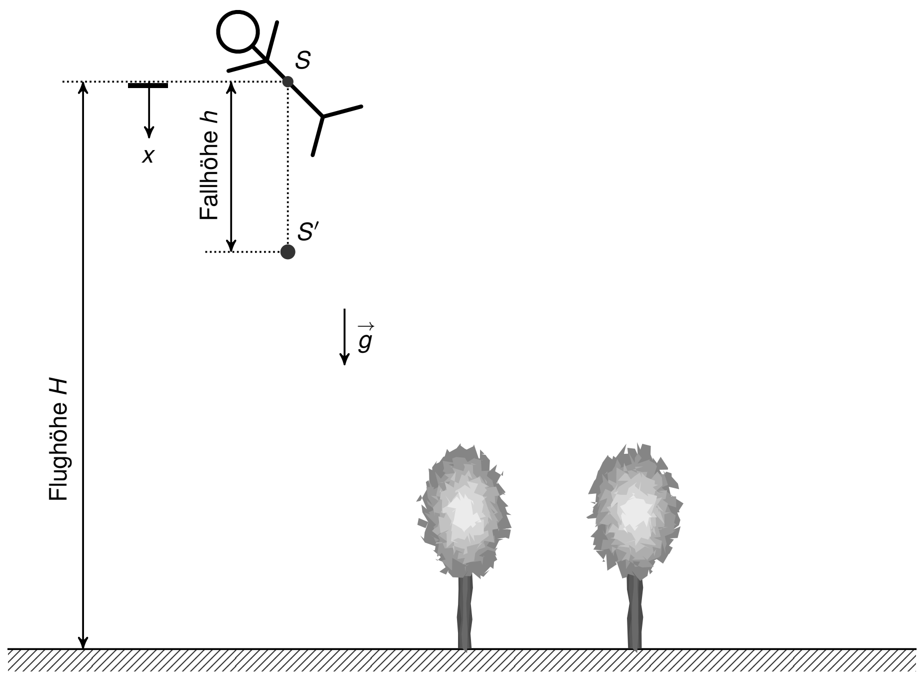
ABBILDUNG 1.2: EXEMPLARISCHER BALLWURF

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1: Fallschirmspringer

Ein Fallschirmspringer erreicht aus der Ruhe nach einer Fallstrecke h seine konstante Endgeschwindigkeit.

Fallschirm-springer



Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Springers, wenn die Beschleunigung mit $a(x) = g\,(1 - \frac{x}{h})$ beschrieben wird?

Bekannt: $h = 300\ \mathrm{m}$; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $0 \le x \le h$

Aufgabe 2: Physikexperiment

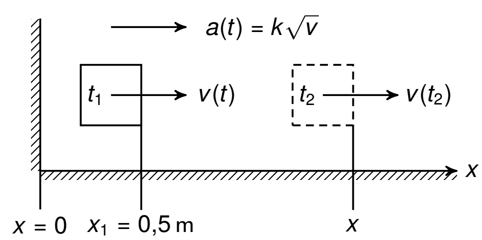
In einem Physikexperiment bewegt sich ein Körper linear entlang einer Achse mit der Beschleunigung $a = k\,\sqrt{v}$. Zum Zeitpunkt der ersten Messung $t_1 = 0$ hat der Körper eine Strecke $x_1 = 0{,}5\ \mathrm{m}$ zurückgelegt und besitzt eine Geschwindigkeit von $v_1 = 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Physik-experiment

a) An welcher Stelle x befindet sich der Körper nach $t_2 = 3\ \mathrm{s}$?

b) Wie groß ist die Beschleunigung und die Geschwindigkeit bei x?

Bekannt: $k = 1\ \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}}$



3.3 Newton und d'Alembert im Vergleich

Das im Abschnitt 3.2 vorgestellte Ablaufschema soll nun an einem einfachen Beispiel besprochen werden, wobei die Unterschiede in den Vorgehensweisen nach Newton und d'Alembert herausgearbeitet werden. Die Abbildung 3.1 zeigt eine Kiste mit Masse m, die von einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$ in der Horizontalen gezogen wird. Eine Feder mit der Federkonstanten c und einen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d wirken in entgegengesetzte Bewegungsrichtung. Die Erdbeschleunigung g steht senkrecht zur Bewegungsrichtung. Der vom Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zurückgelegte Weg wird als x bezeichnet.

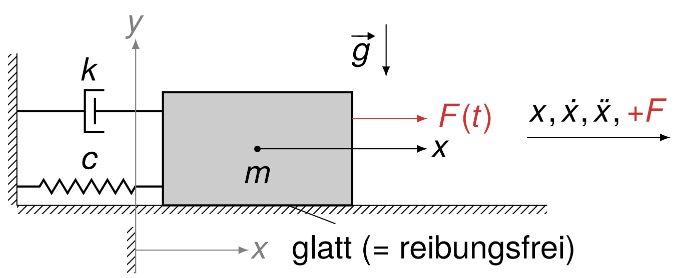
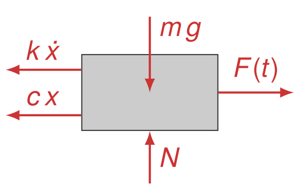
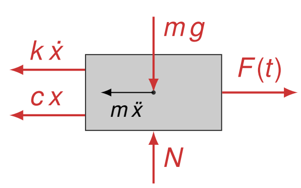


ABBILDUNG 3.1: FEDER-DÄMPFER-SYSTEM

Für die beschriebene Situation soll nun die Bewegungsgleichung mit dem Vorgehen nach Newton und d'Alembert hergeleitet werden.

	Newton	d'Alembert
1.	x nach rechts, y nach oben	x nach rechts, y nach oben
2.	$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$	—
3.	Freischnitt Newton: 	Freischnitt d'Alembert: 
4.	$\vec{F} = (F(t) - c\,x - d\,\dot{x})\,\vec{e_x} + (N - m\,g)\,\vec{e_y}$	—
5.	$\vec{F} = (F(t) - c\,x - d\,\dot{x})\,\vec{e_x} + (N - m\,g)\,\vec{e_y} = m\ddot{x}\vec{e_x}$	$\overset{+}{\rightarrow}$ (1) $-m\ddot{x} - d\,\dot{x} - c\,x + F(t) = 0$
	(1) $F(t) - c\,x - d\,\dot{x} = m\ddot{x}$	$\overset{+}{\uparrow}$ (2) $N - m\,g = 0$
	(2) $N - m\,g = 0$	

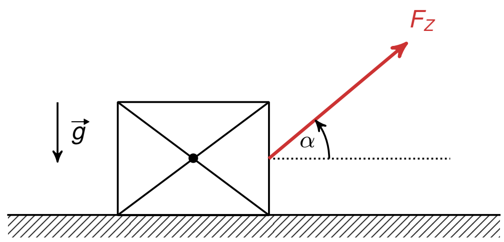
Es wird deutlich, dass beide Methoden zum gleichen Ergebnis führen. Man wertet die Gleichungen in beiden Fällen getrennt für die x-Richtung bzw. die y-Richtung aus. Die Gleichung, welche die Beschleunigung, Geschwindigkeit und Strecke enthält, bezeichnet man als **Bewegungsgleichung**, wobei die andere Gleichung die **Zwangskraftgleichung** darstellt.

3.4 Aufgaben

Aufgabe 17: Gezogene Kiste

Eine Kiste mit der Masse m ist auf einer horizontalen Ebene in Ruhe. An der Kiste wirkt neben der Gravitation und der Gleitreibung eine konstante Kraft F_z unter dem Winkel α. Der Gleitreibungskoeffizient sei μ_g.

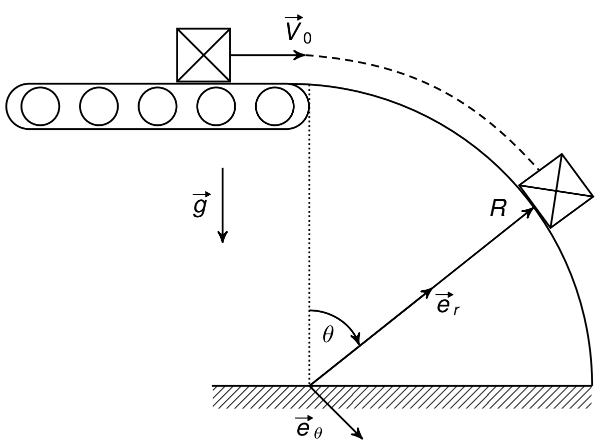
Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kiste nach der Zeit t_1, wenn sie aus der Ruhe heraus beschleunigt wird? Verwenden Sie den Ansatz nach Newton.



Bekannt: $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\mu_g = 0{,}25$; $\alpha = 30°$; $m = 50\,\text{kg}$; $F_z = 500\,\text{N}$; $t_1 = 2\,\text{s}$

Aufgabe 18: Paketrutsche d'Alembert

Ein Paket der Masse m verlässt das Förderband mit der Geschwindigkeit v_0 und gelangt auf eine viertelkreisförmige glatte Rampe mit dem Radius R.



Bei welchem Winkel θ_{max} zur Senkrechten verliert das Paket den Kontakt zur Oberfläche? Verwenden Sie den Ansatz nach d'Alembert.

Bekannt: $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v_0 = 2{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $R = 1{,}5\,\text{m}$

Aufgabe 19: Paketrutsche Newton

Durch eine Störung des Förderbandes bleibt ein Paket der Masse m am Beginn der Rampe aus Aufgabe 18 hängen. Der Mitarbeiter schlägt kräftig gegen das Gestell, wodurch das Paket beginnt, entlang der glatten Rampe mit Radius R zu rutschen.

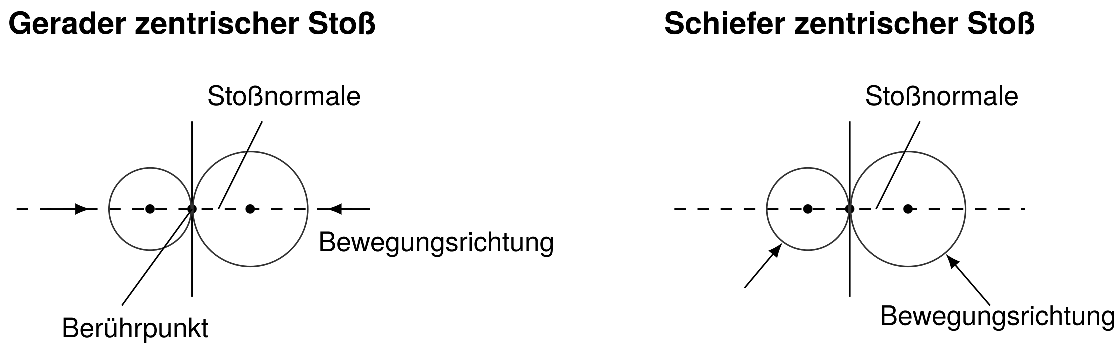


Abbildung 5.2: Gerader und schiefer Stoss

Darüber hinaus gibt es noch eine weitere Unterscheidung: Falls die Stoßnormale durch die beiden Körperschwerpunkte geht (bei Massenpunkten ist dies immer der Fall), spricht man von einem zentralen bzw. zentrischen Stoß. Andernfalls ist dies ein nicht zentraler oder exzentrischer Stoß. Im Folgenden werden die wesentlichen Gleichungen für den geraden zentrischen Stoß hergeleitet. Der nächste Abschnitt widmet sich dem schiefen zentralen Stoß mit der Einschränkung, dass die Reibung vernachlässigt wird.

Die einzelnen Schritte eines Stoßvorgangs werden an der Abbildung 5.3 erläutert. Damit es in Phase 1 zum Stoß kommt, muss die Geschwindigkeit v_{A0} des Körpers A größer sein als die Geschwindigkeit v_{B0} des Körpers B.

Abbildung 5.3: Phasen beim Stoss

Unmittelbar nach dem Auftreffen der beiden Körper gibt es eine Kompressionsphase bis zur maximalen Verformung, gefolgt von einer Dekompressionsphase bzw. Restitutionsphase.

Der Verlauf der Stoßkraft mit den beiden maßgeblichen Phasen ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Bei der Berührung steigt dabei die Kraft an und wird wieder Null, sobald sich die Körper trennen. Das Profil muss nicht zwangsläufig symmetrisch sein, da eine gewisse Verformung zurückbleiben kann.

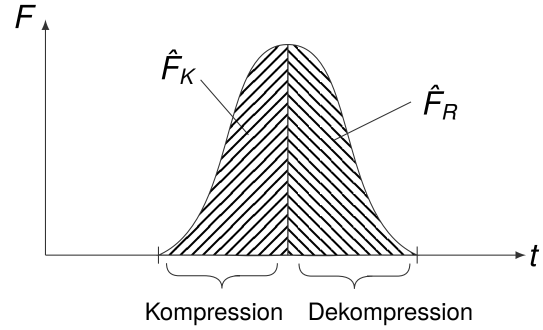


Abbildung 5.4: Kraftverlauf