Inhalt

IV Stochastik 155

Motivational #1

Es geht nicht darum, der Beste zu sein. Es geht darum, besser als gestern zu sein.

Bevor du mit diesem Matheskript loslegst, empfehle ich dir, dich mit deinem Notenziel zu beschäftigen. Nimm dir dafür bewusst einen Moment Zeit. Dein Notenziel sollte ambitioniert, aber realistisch sein. Welche Note soll am Ende auf deinem Abiturzeugnis stehen? Genau darauf arbeitest du ab jetzt hin! Viele Studien belegen, dass Menschen mit Zielen effektiver, ausdauernder und erfolgreicher sind.

Zu den Motivationsvideos

@mathe.nick

2 Gleichungen lösen

Zur Bestimmung von x solltet ihr folgende Standardtechniken beherrschen.

Punktprobe

1. Umformen:
(wenn x^1 die höchste Potenz ist)

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \quad &| +8 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 8 \quad &| :2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 \end{aligned}$$

2. Umformen/Wurzel:
(wenn es kein x, sondern nur x^2 gibt)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 \quad &| +8 \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2 &= 8 \quad &| :2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 4 \quad &| \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 2 \lor x = -2 \end{aligned}$$

> Merke: Die Gleichung $x^2 = a$ hat für
> - $a > 0$ die **beiden** Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$,
> - $a = 0$ die **einzige** Lösung $x = 0$,
> - $a < 0$ **keine** Lösung, denn es darf keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden! Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

3. Ausklammern: (wenn eine Seite Null und sonst nur Terme mit x)

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{4}x^5 &= 0 \quad | \ x \text{ ausklammern!} \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{x^3}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}_{\text{Faktor}}}_{\text{Produkt}} &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt (Faktor · Faktor) ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Produktform

Gleichung mit x^3 lösen

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{1}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -2$$

4. pq-Formel: (Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$)

> Direkte Lösung:
> $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 4x - 16 = 0 && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 2x - 8 = 0 && \mid pq\text{-Formel anwenden} \\
\Rightarrow\quad & x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9} \\
\Leftrightarrow\quad & x = 4 \vee x = -2
\end{aligned}
$$

abc-Formel

5. <u>*abc*-Formel:</u> (Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

> Direkte Lösung:
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 4x - 16 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x = 4 \vee x = -2
\end{aligned}
$$

6. <u>Substitution:</u> (Gleichung mit 2 Exponenten, die das doppelte voneinander sind)

Beispiel $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (biquadratische Gleichung)
Substitution: $x^2 = z$:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \overset{x^2=z}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{z^2 - 2z - 8 = 0}_{\text{quad. Gleichung}}$$

Gleichung mit *pq*-Formel lösen: $z = 4 \ \vee \ z = -2$.
Rücksubstitution/Resubstitution :

$$
\begin{aligned}
z = 4 \quad & \overset{z=x^2}{\Longrightarrow} \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2 \\
z = -2 \quad & \overset{z=x^2}{\Longrightarrow} \quad x^2 = -2: \ \text{Quadratwurzel nicht möglich}
\end{aligned}
$$

7. <u>Polynomdivision:</u> (wenn nichts anderes geht)

Die erste Nullstelle durch Probieren herausfinden (raten) und dann Polynomdivision durchführen. **Beispiel**

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 5$$

- Erste Nullstelle raten: mit Taschenrechner Werte einsetzen. Beachte: konstanter Term „5" ist ein Vielfaches von allen Nullstellen. Man kann daher mit den ganzzahligen Teilern $(\pm 1, \pm 5)$ von 5 beginnen:

$$\text{Probe:} \quad f(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 5 = 0 \ \checkmark$$

- Charakteristisches Polynom $(x - x_1) = (x - 1)$ aufstellen.
- Prüfen, ob in der Funktionsgleichung eine Potenz von x „fehlt". Wenn ja, diese mit dem Faktor Null ergänzen (hier „fehlt" nichts).
- Polynomdivision durchführen:

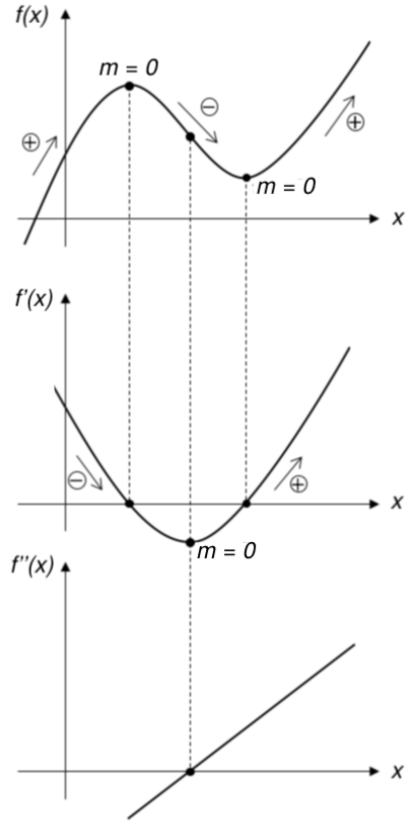
5.9 Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung

NEW-Regel

Anhand der folgenden Grafik können wir schön sehen, wie $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ miteinander verbunden sind.

N steht hierbei für die Nullstelle, E für Extrempunkt und W für den Wendepunkt.

$f(x)$	N	E	$\boldsymbol{W}$		
$f'(x)$		N	$\boldsymbol{E}$	W	
$f''(x)$			$\boldsymbol{N}$	E	W



Was soll uns diese Tabelle sagen? Die Tabelle zeigt zusammenfassend, welche Funktion uns welchen Wert für die jeweilige Ableitung oder Aufleitung liefert.

Gucken wir uns dazu die Abbildung etwas genauer an: Die Nullstelle der 2. Ableitung $f''(x)$ zeigt uns den x-Wert für den Extrempunkt der 1. Ableitung $f'(x)$. Dieser wiederum zeigt uns, wo die Ausgangsfunktion $f(x)$ seinen Wendepunkt hat.

5.10 Aufgaben

Lösungen

A-5.1. Wie verhalten sich folgende Funktionen, wenn $x \to +\infty$ beziehungsweise wenn $x \to -\infty$ strebt?

a) $f(x) = x^5 - x^3$

b) $f(x) = x^2 - x^3 + 100$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{1-x^3}$

d) $f(x) = \frac{5-x}{3+x}$

A-5.2. Sind folgende Funktionen symmetrisch? Wenn ja, welcher Art von Symmetrie folgen sie?

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

c) $f(x) = -3x^3 + 2x$

d) $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$

e) $f(x) = 2x + \sin(x)$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

A-5.3. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen nicht definiert? Gebe Definitions- und Wertebereich an.

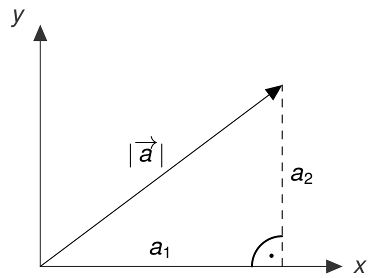
a) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3-4}{x}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2x^2-6x}$

d) $f(x) = \frac{2x}{x(x+4)}$

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für einen Vektor $\vec{a} = (a_1 \; a_2)^T$ in der Ebene:



$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= a_1^2 + a_2^2 && |\sqrt{\ } \\ \Rightarrow \quad |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} && |\text{ immer positiv} \end{aligned}$$

Länge Vektor

Betrag eines Vektors (im $\mathbb{R}^3$)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

14.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt, $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$, in der mindestens einer der Koeffizienten r, s ungleich 0 ist. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit ist einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen. Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren bedeutet anschaulich, dass beide nicht parallel sind.

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, wenn es keine reellen Zahlen r, s, t gibt, die alle drei $\neq 0$ sind, sodass gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit lässt sich ein Vektor als Summe vom Vielfachen der beiden anderen darstellen, anschaulich: die drei Vektoren liegen in einer Ebene. Drei linear unabhängige Vektoren liegen nicht in einer Ebene.

Beispiel Die Vektoren $\vec{a} = (1 \; 1 \; 2)^T$, $\vec{b} = (3 \; -1 \; 1)^T$ und $\vec{c} = (-1 \; 3 \; 3)^T$ sollen auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden.

$$\text{Ansatz:} \qquad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad \begin{cases} \text{lin. unabh.,} & \text{für } r = s = t = 0 \\ \text{lin. abh.,} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Hier also:} \quad r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt drei Gleichungen (für jede Zeile eine Gleichung):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad r + 3s - t &= 0 \\ \text{(II)} \quad r - s + 3t &= 0 \\ \text{(III)} \quad 2r + s + 3t &= 0 \end{aligned}$$

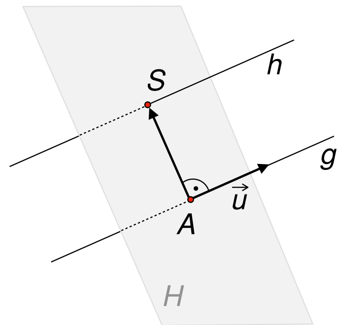
Wir lösen das Gleichungssystem z.B. mit dem Additionsverfahren, in dem wir (I)+($-1\cdot$(II)) rechnen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{(I)} + (-1 \cdot \text{(II))} \quad 4s - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad t &= s \end{aligned}$$

18.3 Abstand: Gerade - Gerade

Geraden sind parallel

Zwei parallele Geraden besitzen überall denselben Abstand. Damit lässt sich der Abstand zweier paralleler Geraden $g : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h : \vec{x} = \overrightarrow{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ genauso bestimmen, wie der Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Geraden.



Vorgehen: Lotebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene H, welche senkrecht auf g steht und durch den Aufpunkt A von g verläuft. Verwende dazu den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g als Normalenvektor und A als Aufpunkt der Ebene H:

$$H : \vec{u} \bullet (\vec{x} - \overrightarrow{0A}) = 0$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden h mit der Hilfsebene H.

3. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{AS}$ (also den Betrag davon) gibt den gesuchten Abstand der beiden Geraden an.

Geraden sind windschief

Im Folgenden werden zwei verschiedene Verfahren aufgezeigt, um den Abstand zweier windschiefer Geraden $g : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h : \vec{x} = \overrightarrow{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ zu berechnen:

1. **Parallelebenen-Verfahren**: liefert lediglich den Abstand der Geraden
2. **Lotvektor-Verfahren**: liefert Abstand und Koordinaten der nächstgelegenen Punkte

Vorgehen: Parallelebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene $H : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{u} + u \cdot \vec{v}, t, u \in \mathbb{R}$, die die Gerade g enthält und zu h parallel ist. Verwende dazu den Aufpunkt A und den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g sowie den Richtungsvektor $\vec{v}$ von h.

2. Wandle H in die HNF um mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

3. Berechne den Abstand eines beliebigen Punktes von h (z.B. des Aufpunktes B) zu H.

Beispiel Gesucht ist der Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

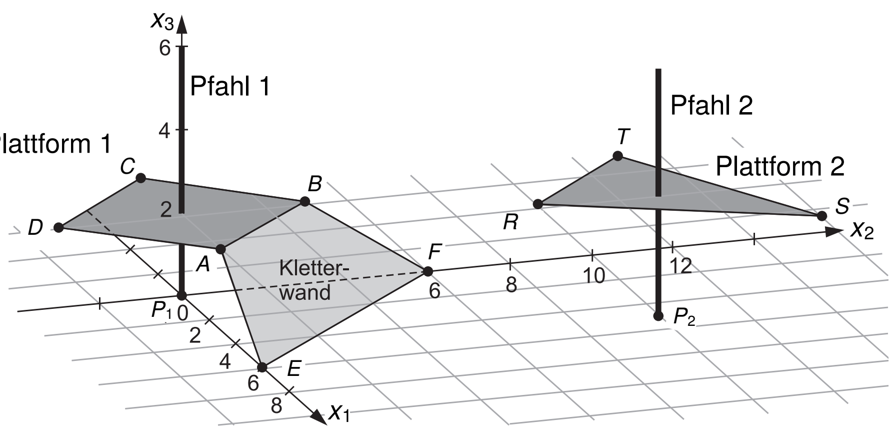
21 Aufgaben auf Abiturniveau

Aufgabe: „Kletteranlage“[1]

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Teile einer Kletteranlage:

Lösungen

- zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind
- eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 - Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2), B(0|3|2), E(6|0|0), F(0|6|0), R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a) In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

b) Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.
[zur Kontrolle: $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$]

c) Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

[1] Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2018 - Prüfungsteil B - Geometrie - Aufgabengruppe 2