

Inhalt

I	Analysis	13
1	Funktionen	15
1.1	Grundfunktionen	15
1.2	Die drei häufigsten trigonometrischen Funktionen	17
1.3	Graphentransformation	17
1.4	Umkehrfunktion	18
1.5	Was ist in der Funktion gegeben?	20
1.6	Aufgaben	20
2	Gleichungen lösen	21
2.1	Aufgaben	24
3	Ableitung	25
3.1	Allgemein	25
3.2	Ableitungsregeln	26
3.3	Aufgaben	28
4	Sekante, Tangente und Normale	29
4.1	Sekantengleichung aufstellen	29
4.2	Tangentengleichung aufstellen	29
4.3	Normale, Senkrechte bzw. Orthogonale aufstellen	30
4.4	Aufgaben	31
5	Kurvendiskussion	33
5.1	Grenzverhalten	33
5.2	Symmetrie	34
5.3	Achsenabschnitte	34
5.4	Definitions- und Wertebereich	35
5.5	Extrempunkte	36
5.6	Wendepunkte	37
5.7	Monotonie	38
5.8	Krümmung	38

5.9	Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung	39
5.10	Aufgaben	39
6	LGS lösen	41
6.1	Lösungsstrategien	41
6.2	Gauß-Algorithmus	43
6.3	Aufgaben	44
7	Modellierungsaufgaben	45
7.1	Steckbriefaufgaben	45
7.2	Trassierungsaufgaben	46
7.3	Aufgaben	48
8	Optimierungsaufgaben	49
8.1	Lösungsstrategien	49
8.2	Aufgaben	50
9	Wachstumsprozesse	51
9.1	Lineares und exponentielles Wachstum	51
9.2	Aufgaben	53
10	Integralrechnung	55
10.1	Grundlagen	55
10.2	Typische Stammfunktionen	56
10.3	Unbestimmtes Integral	56
10.4	Bestimmtes Integral	57
10.5	Flächeninhalte bestimmen	57
10.6	Partielle Integration	58
10.7	Integration durch Substitution	59
10.8	Mittelwertsatz	60
10.9	Rotationskörper	61
10.10	Zusatz	61
10.11	Aufgaben	63
11	Scharfunktionen	65
11.1	Zusammenhänge	65
11.2	Aufgaben	66
12	Specials	67
13	Aufgaben auf Abiturniveau	71

II	Analytische Geometrie	73
14	Vektoren	75
14.1	Punkte und Vektoren im Koordinatensystem	75
14.2	Rechnen mit Vektoren	76
14.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	78
14.4	Aufgaben	83
15	Geraden	85
15.1	Aufgaben	86
16	Ebenen	87
16.1	Darstellungsformen der Ebenengleichung	87
16.2	Aufstellen der Ebenengleichung in Parameterform	90
16.3	Umwandeln von Ebenengleichungen	93
16.4	Aufgaben	96
17	Lagebeziehungen	97
17.1	Lage: Punkt - Gerade	97
17.2	Lage: Punkt - Ebene	98
17.3	Lage: Gerade - Gerade	99
17.4	Lage: Gerade - Ebene	100
17.5	Lage: Ebene - Ebene	101
17.6	Schnittwinkel	103
17.7	Spurpunkte und Spurgeraden	105
17.8	Aufgaben	107
18	Abstandsrechnung	109
18.1	Abstand: Punkt - Punkt	109
18.2	Abstand: Punkt - Gerade	109
18.3	Abstand: Gerade - Gerade	111
18.4	Abstand: Punkt - Ebene	113
18.5	Abstand: Gerade - Ebene	114
18.6	Abstand: Ebene - Ebene	114
18.7	Aufgaben	115
19	Projektion und Spiegelung	117
19.1	Spiegelung	117
19.2	Projektion	121
19.3	Aufgaben	122
20	Kreise und Kugeln	123
20.1	Kreis- und Kugelgleichung	123

20.2	Lagebeziehung und Abstand	124
20.3	Aufgaben	128
21	Aufgaben auf Abiturniveau	129
III Lineare Algebra		131
22	Grundlagen	133
22.1	Matrizen	133
22.2	Rechnen mit Matrizen	134
22.3	vom LGS zur Matrix	136
22.4	Aufgaben	136
23	Austauschprozesse	137
23.1	Vorhersagen	138
23.2	Zeitlich Rückwärtsrechnen	139
23.3	Aufgaben	141
24	Populationsprozesse	143
24.1	Zyklus bei Populationen	143
24.2	Aufgaben	144
25	Produktionsprozesse	145
25.1	1-Schritt-Verflechtungsmodell	145
25.2	Einfache Mehrschritt-Modelle	145
25.3	Aufgaben	146
26	Affine Abbildungen	147
26.1	Spiegelungen	147
26.2	Projektionen	148
26.3	Fixpunkt	149
26.4	Fixpunktgerade	150
26.5	Fixgerade	150
26.6	Verkettung von Abbildungen	151
26.7	Abbildungsgleichung	151
26.8	Aufgaben	152
27	Aufgaben auf Abiturniveau	153

IV	Stochastik	155
28	Grundlagen	157
28.1	Begriffe	157
28.2	Wahrscheinlichkeit nach Laplace	158
29	Baumdiagramme	159
29.1	Mit oder ohne zurücklegen?	159
29.2	Pfadregeln	160
29.3	Aufgaben	160
30	Kombinatorik	161
30.1	Grundlagen	161
30.2	Aufgaben	163
31	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	165
31.1	Grundlagen	165
31.2	4-Felder-Tafel	166
31.3	Aufgaben	168
32	Diskrete Verteilungen	169
32.1	Grundlagen	169
32.2	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion	170
32.3	Parameter	171
32.4	Bernoulli-Verteilung	173
32.5	Binomialverteilung	174
32.6	Hypergeometrische Verteilung	176
32.7	Aufgaben	178
33	Stetige Verteilungen	179
33.1	Grundlagen	179
33.2	Normalverteilung	181
33.3	Approximation durch Normalverteilung	183
33.4	Aufgaben	184
34	Hypothesentests	187
34.1	Grundlagen	187
34.2	Testen mit Hilfe der Normalverteilung	190
34.3	Aufgaben	192
35	Aufgaben auf Abiturniveau	195

Motivational #1

Es geht nicht darum, der Beste zu sein. Es geht darum, besser als gestern zu sein.

Bevor du mit diesem Matheskript loslegst, empfehle ich dir, dich mit deinem Notenziel zu beschäftigen. Nimm dir dafür bewusst einen Moment Zeit. Dein Notenziel sollte ambitioniert, aber realistisch sein. Welche Note soll am Ende auf deinem Abiturzeugnis stehen? Genau darauf arbeitest du ab jetzt hin! Viele Studien belegen, dass Menschen mit Zielen effektiver, ausdauernder und erfolgreicher sind.

Zu den
Motivationsvideos



@mathe.nick



2 Gleichungen lösen

Zur Bestimmung von x solltet ihr folgende Standardtechniken beherrschen.

1. Umformen:
(wenn x^1 die höchste Potenz ist)

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 & | + 8 \\ \Leftrightarrow 2x &= 8 & | : 2 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

2. Umformen/Wurzel:
(wenn es kein x , sondern nur x^2 gibt)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 & | + 8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 8 & | : 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4 & | \sqrt{} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$



Punktprobe

Merke: Die Gleichung $x^2 = a$ hat für

- $a > 0$ die **beiden** Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$,
- $a = 0$ die **einzige** Lösung $x = 0$,
- $a < 0$ **keine** Lösung, denn es darf keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden! Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

3. Ausklammern: (wenn eine Seite Null und sonst nur Terme mit x)

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{4}x^5 &= 0 & | x \text{ ausklammern!} \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^3}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}_{\text{Faktor}} &= 0 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Produkt}} \end{aligned}$$

Ein Produkt (Faktor · Faktor) ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{1}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

4. pq-Formel: (Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$)

Direkte Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



Produktform



Gleichung mit x^3 lösen

Beispiel

$$2x^2 - 4x - 16 = 0 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \quad | pq\text{-Formel anwenden}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$



abc-Formel

5. abc-Formel: (Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

Direkte Lösung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

6. Substitution: (Gleichung mit 2 Exponenten, die das doppelte voneinander sind)

Beispiel $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (biquadratische Gleichung)

Substitution: $x^2 = z$:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \xrightarrow{x^2=z} \quad \underbrace{z^2 - 2z - 8 = 0}_{\text{quad. Gleichung}}$$

Gleichung mit pq -Formel lösen: $z = 4 \vee z = -2$.

Rücksubstitution/Resubstitution :

$$z = 4 \quad \xrightarrow{z=x^2} \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$$

$$z = -2 \quad \xrightarrow{z=x^2} \quad x^2 = -2 : \text{Quadratwurzel nicht möglich}$$

7. Polynomdivision: (wenn nichts anderes geht)

Die erste Nullstelle durch Probieren herausfinden (raten) und dann Polynomdivision durchführen. **Beispiel**

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 5$$

- Erste Nullstelle raten: mit Taschenrechner Werte einsetzen. Beachte: konstanter Term „5“ ist ein Vielfaches von allen Nullstellen. Man kann daher mit den ganzzahligen Teilern ($\pm 1, \pm 5$) von 5 beginnen:

$$\text{Probe: } f(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 5 = 0 \checkmark$$

- Charakteristisches Polynom $(x - x_1) = (x - 1)$ aufstellen.
- Prüfen, ob in der Funktionsgleichung eine Potenz von x „fehlt“. Wenn ja, diese mit dem Faktor Null ergänzen (hier „fehlt“ nichts).
- Polynomdivision durchführen:



NEW-Regel

5.9 Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung

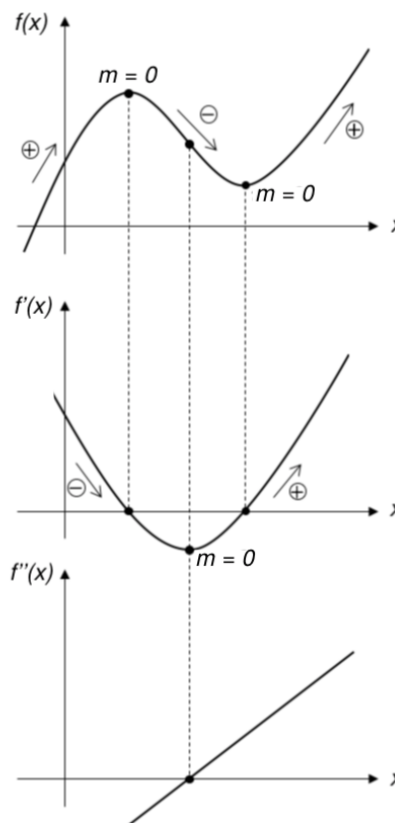
Anhand der folgenden Grafik können wir schön sehen, wie $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ miteinander verbunden sind.

N steht hierbei für die Nullstelle, E für Extrempunkt und W für den Wendepunkt.

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W

Was soll uns diese Tabelle sagen? Die Tabelle zeigt zusammenfassend, welche Funktion uns welchen Wert für die jeweilige Ableitung oder Aufleitung liefert.

Gucken wir uns dazu die Abbildung etwas genauer an: Die Nullstelle der 2. Ableitung $f''(x)$ zeigt uns den x -Wert für den Extrempunkt der 1. Ableitung $f'(x)$. Dieser wiederum zeigt uns, wo die Ausgangsfunktion $f(x)$ seinen Wendepunkt hat.



5.10 Aufgaben

A-5.1. Wie verhalten sich folgende Funktionen, wenn $x \rightarrow +\infty$ beziehungsweise wenn $x \rightarrow -\infty$ strebt?

a) $f(x) = x^5 - x^3$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{1-x^3}$

b) $f(x) = x^2 - x^3 + 100$

d) $f(x) = \frac{5-x}{3+x}$



Lösungen

A-5.2. Sind folgende Funktionen symmetrisch? Wenn ja, welcher Art von Symmetrie folgen sie?

a) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = -3x^3 + 2x$

e) $f(x) = 2x + \sin(x)$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

d) $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

A-5.3. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen nicht definiert? Gebe Definitions- und Wertebereich an.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

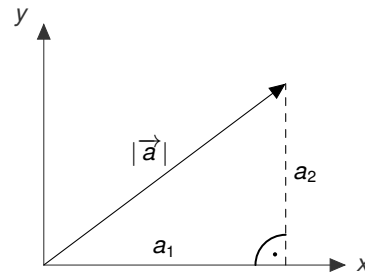
b) $f(x) = \frac{x^3-4}{x}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2x^2-6x}$

d) $f(x) = \frac{2x}{x(x+4)}$

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für einen Vektor $\vec{a} = (a_1 \ a_2)^T$ in der Ebene:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= a_1^2 + a_2^2 \quad |\sqrt{} \\ \Rightarrow |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad |\text{immer positiv} \end{aligned}$$



Länge Vektor

Betrag eines Vektors (im \mathbb{R}^3)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

14.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt, $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$, in der mindestens einer der Koeffizienten r, s ungleich 0 ist. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit ist einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen. Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren bedeutet anschaulich, dass beide nicht parallel sind.

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, wenn es keine reellen Zahlen r, s, t gibt, die alle drei $\neq 0$ sind, sodass gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit lässt sich ein Vektor als Summe vom Vielfachen der beiden anderen darstellen, anschaulich: die drei Vektoren liegen in einer Ebene. Drei linear unabhängige Vektoren liegen nicht in einer Ebene.

Beispiel Die Vektoren $\vec{a} = (1 \ 1 \ 2)^T$, $\vec{b} = (3 \ -1 \ 1)^T$ und $\vec{c} = (-1 \ 3 \ 3)^T$ sollen auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden.

$$\text{Ansatz:} \quad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{lin. unabh., für } r = s = t = 0 \\ \text{lin. abh., sonst} \end{array} \right.$$

$$\text{Hier also:} \quad r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt drei Gleichungen (für jede Zeile eine Gleichung):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad r + 3s - t &= 0 \\ \text{(II)} \quad r - s + 3t &= 0 \\ \text{(III)} \quad 2r + s + 3t &= 0 \end{aligned}$$

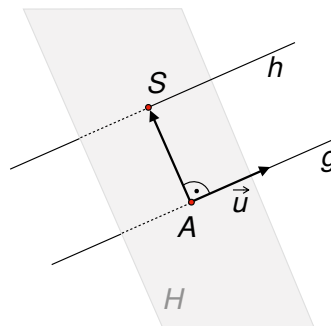
Wir lösen das Gleichungssystem z.B. mit dem Additionsverfahren, in dem wir (I) + (-1 · (II)) rechnen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{(I)} + (-1 \cdot \text{(II)}) \quad 4s - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= s \end{aligned}$$

18.3 Abstand: Gerade - Gerade

Geraden sind parallel

Zwei parallele Geraden besitzen überall denselben Abstand. Damit lässt sich der Abstand zweier paralleler Geraden $g: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ genauso bestimmen, wie der Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Geraden.



Vorgehen: Lotebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene H , welche senkrecht auf g steht und durch den Aufpunkt A von g verläuft. Verwende dazu den Richtungsvektor \vec{u} von g als Normalenvektor und A als Aufpunkt der Ebene H :

$$H: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{0A}) = 0$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden h mit der Hilfsebene H .
3. Die Länge des Vektors \vec{AS} (also den Betrag davon) gibt den gesuchten Abstand der beiden Geraden an.

Geraden sind windschief

Im Folgenden werden zwei verschiedene Verfahren aufgezeigt, um den Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ zu berechnen:

1. **Parallelebenen-Verfahren:** liefert lediglich den Abstand der Geraden
2. **Lotvektor-Verfahren:** liefert Abstand und Koordinaten der nächstgelegenen Punkte

Vorgehen: Parallelebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene $H: \vec{x} = \vec{0A} + t \cdot \vec{u} + u \cdot \vec{v}, t, u \in \mathbb{R}$, die die Gerade g enthält und zu h parallel ist. Verwende dazu den Aufpunkt A und den Richtungsvektor \vec{u} von g sowie den Richtungsvektor \vec{v} von h .
2. Wandle H in die HNF um mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.
3. Berechne den Abstand eines beliebigen Punktes von h (z.B. des Aufpunktes B) zu H .

Beispiel Gesucht ist der Abstand der beiden windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

21 Aufgaben auf Abiturniveau

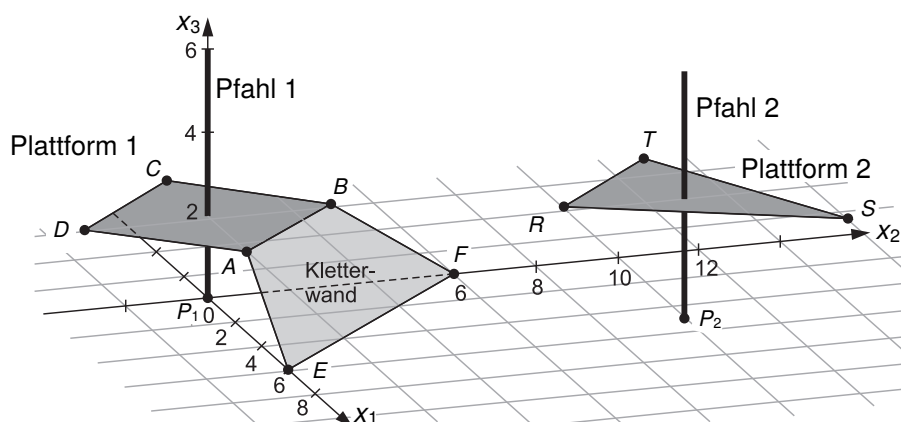
Aufgabe: „Kletteranlage“¹

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Teile einer Kletteranlage:

- zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind
- eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist



Lösungen



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 - Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

- In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.
- Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L . Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.
[zur Kontrolle: $L : 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$]
- Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

¹Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2018 - Prüfungsteil B - Geometrie - Aufgabengruppe 2