Inhalt

DIVISION:

Die Multiplikation machen wir uns für die Division zunutze, indem wir statt zu dividieren mit dem Kehrbruch multiplizieren:

$$\frac{3}{6} : \frac{7}{4} = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 7} = \frac{12}{42}$$

Wir merken uns für die **Division**:

Division = Multiplikation mit dem Kehrbruch

1.2 Kürzen und Erweitern

Nachdem wir uns die ersten Rechenregeln angeschaut haben, kommen wir zu einer weiteren Besonderheit von rationalen Zahlen. Wir können uns das Leben deutlich leichter machen, wenn wir das *Erweitern* und *Kürzen* lernen. Um zu zeigen, worum es sich dabei handelt, zunächst ein paar Beispiele.

KÜRZEN UND ERWEITERN:

Kürzen können wir wie folgt:

$$\frac{4}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{4}}{2 \cdot \cancel{4}} \overset{\text{Kürzen}}{=} \frac{1}{2}$$

Erweitern ist der Gegenspieler des Kürzens:

$$\frac{3}{7} \overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

Sowohl das Erweitern als auch das Kürzen haben sinnvolle Anwendungen. Kürzen dient oft dazu, ein Ergebnis zu vereinfachen und so eine bessere Vorstellung davon zu erhalten (z.B. ist es einfacher sich 1/2 vorzustellen als 24/48). Erweitern hingegen hilft beispielsweise bei Rechnungen mit Addition und Subtraktion, wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden.

1.3 Addieren und Subtrahieren

Schauen wir uns die Addition und Subtraktion in ein paar Beispielen an.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = \frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{3}\,1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{8}{7} - \frac{3}{7} = \frac{8-3}{7} = \frac{5}{7}$$

Es stellt sich die Frage: Was machen wir, wenn die Nenner unterschiedlich sind? Hier nutzen wir die Möglichkeit des Erweiterns:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{8+15}{20} = \frac{23}{20}$$

Die einfachste Methode ist es tatsächlich, mit dem Nenner des anderen Summanden zu erweitern.

4 Potenzen

Eine Potenz b^n ist eine Rechenoperation und besteht aus einer **Basis** b und einem **Exponenten** n. Welche Funktionen diese haben, also wie wir die Potenz ausrechnen, schauen wir uns an einem Beispiel an.

Wir beginnen mit der Basis $b = 5$ und dem Exponenten $n = 4$ und fragen uns, welches Ergebnis die Potenz liefert. Dazu rechnen wir:

$$b^n = 5^4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4-\text{mal}} = 625$$

Was beim Potenzieren passiert, wird hierbei deutlich. Wir multiplizieren die Basis so oft mit sich selbst, wie es der Exponent angibt.

Potenzen:

Für das Potenzieren von Zahlen gilt:

$$b^n = \underbrace{b \cdot \ \ldots \ \cdot b}_{n-\text{mal}}$$

4.1 Rechnen mit Potenzen

Multiplikation und Division bei gleicher Basis

Möchten wir zwei Potenzen miteinander multiplizieren oder durcheinander teilen, so geht dies sehr leicht, wenn die Potenzen dieselbe Basis haben. Beispielsweise erhalten wir durch das Anwenden der obenstehenden Definition:

$$5^7 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot \ldots \cdot 5}_{7-\text{mal}} \cdot \underbrace{5 \cdot \ldots \cdot 5}_{3-\text{mal}} = \underbrace{5 \cdot \ldots \cdot 5}_{10-\text{mal}} = 5^{10} = 5^{7+3}$$

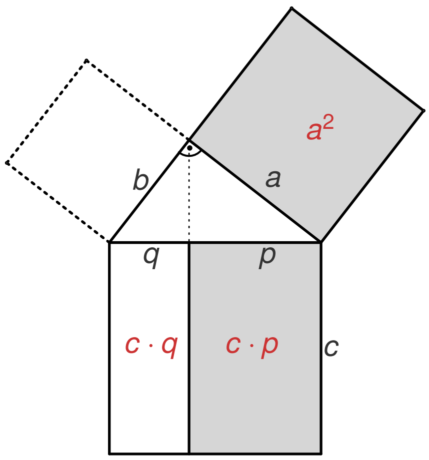
Hieraus lässt sich eine einfache Rechenregel für die **Multiplikation** zweier Potenzen mit gleicher Basis ableiten:

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

6.3 Kathetensatz

Für den Kathetensatz betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse ist durch $c = p + q$ gegeben. Die Strecken p und q erhalten wir, indem wir von dem Punkt, an dem der rechte Winkel anliegt, ein Lot auf die Seite c fällen.

> **Satz 6.3.1** (Kathetensatz)**.** *In dieser Situation ist die Fläche des Rechtecks mit den Seiten c und p gleich der Fläche des anliegenden Kathetenquadrats.*
>
> $$a^2 = c \cdot p$$
>
> *Ebenso stellen wir fest, dass gilt:* $b^2 = c \cdot q$

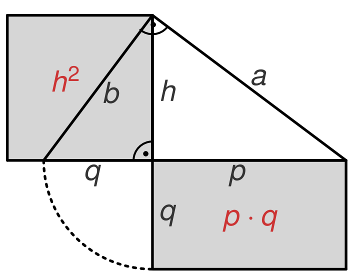


KATHETENSATZ:

6.4 Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck mit Höhe h, den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c, können wir durch die gleiche Konstruktion wie beim Kathetensatz die Hypotenuse aufteilen in $c = p + q$. Dann gilt der Höhensatz.

> **Satz 6.4.1** (Höhensatz)**.** *In dieser Situation ist die Fläche des Höhenquadrats gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seiten p und q.*
>
> $$h^2 = p \cdot q$$



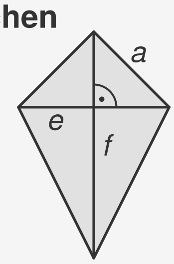
HÖHENSATZ:

Ein **Drachen** ist ein Viereck, bei dem die Diagonalen e und f senkrecht zueinander stehen. Je zwei Seiten haben die gleiche Länge. Diese liegen sich nicht gegenüber.

FLÄCHE DRACHE:

Flächeninhalt von Drachen

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$



Flächenformeln Übersicht

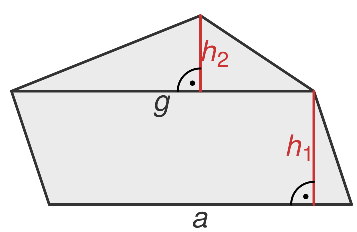
Figur	Formel	Bemerkung
Quadrat	$A = a^2$	a: Seite des Quadrats
Rechteck	$A = a \cdot b$	a, b: verschiedene Seiten
Parallelogramm	$A = a \cdot h$	a: Seite des Parallelogramms, h: Höhe
Dreieck	$A = \frac{g \cdot h}{2}$	g: Grundseite, h: Höhe
Trapez	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	a, c: parallele Seiten des Trapez, h: Höhe
Raute	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	e, f: Diagonalen
Drachen	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	e, f: Diagonalen

Mit diesen relativ leichten Formeln können wir auch die Flächeninhalte von komplizierteren Figuren bestimmen.

Beispiel - zusammengesetzte Fläche
Wir rechnen den Flächeninhalt der gegebenen Figur aus, indem wir den Flächeninhalt des unteren Parallelogramms und des oberen Dreiecks ausrechnen. Gegeben seien die folgenden Werte:

$$a = 7, \quad h_1 = 5, \quad h_2 = 3$$

ZUSAMMENGESETZTE FLÄCHE:



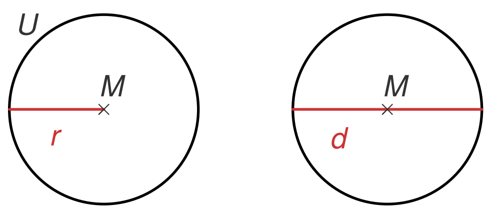
Wir sehen schnell, dass $a = g$ gelten muss, da in einem Parallelogramm gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind. Damit haben wir alle notwendigen Informationen, um die Flächeninhalte zu berechnen:

$$A_{Parallelogramm} = a \cdot h_1 = 7 \cdot 5 = 35 \text{ [FE]}$$
$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10{,}5 \text{ [FE]}$$

Damit ergibt sich eine Gesamtfläche von $A = A_{Parallelogramm} + A_{\triangle} = 35 + 10{,}5 = 45{,}5$ Flächeneinheiten.

10.4 Kreisfläche und Kreisumfang

Eine der wichtigsten Informationen über einen Kreis ist dessen **Radius** r beziehungsweise **Durchmesser** d. Damit lassen sich sowohl **Umfang** als auch die **Fläche** sehr schnell und leicht berechnen.



KREIS KONSTRUIEREN:

Der Radius bezeichnet die Länge der Strecke vom Kreismittelpunkt bis zum Rand des Kreises. Somit gilt $d = 2r$.

Um den Umfang und Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, müssen wir uns mit der Zahl π auseinandersetzen. Diese Zahl lässt sich nicht als Bruch darstellen und hat unendlich viele Nachkommastellen. π wird häufig auch als Kreiszahl bezeichnet, da sie bei so vielen Formeln im Zusammenhang mit Kreisen und ähnlichen Objekten auftaucht. Sie lautet:

$$\pi = 3{,}14159265359...$$

Es sind noch viele weitere Nachkommastellen von π bekannt. Jedoch ist es beim Rechnen am besten, einfach die Variable π zu verwenden, ohne die genaue Zahl hinzuschreiben. Wir werden in Beispielen noch sehen, wie du das sinnvoll und gut machen kannst.

Haben wir einen Kreis mit zugehörigem Radius r oder Durchmesser d gegeben, so können wir seinen Umfang durch die folgende Formel berechnen:

Umfang von Kreisen

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

11.3 Zylinder

Einen Zylinder können wir uns als ein Prisma mit kreisförmiger Grundfläche vorstellen. Daher ändert sich beim **Volumen** auch nicht viel, außer der Formel für die Grundfläche.

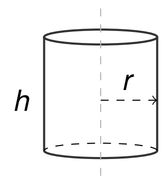
Volumen eines Zylinders

$$V = G \cdot h$$

VOLUMEN ZYLINDER:

Die Grundfläche G lässt sich wie zuvor bei der Flächenberechnung von Kreisen durch $G = \pi \cdot r^2$ berechnen, wobei r der Radius der Grundfläche ist und auch als Radius des Zylinders bezeichnet wird.

Beispiel
Es sei ein Zylinder mit Radius $r = 2{,}5$ cm und Höhe $h = 6$ cm gegeben.



Wir berechnen zunächst die Kreisfläche:

$$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2{,}5\ \text{cm})^2 = \frac{25}{4}\pi\ \text{cm}^2$$

Nun können wir die Volumenformel nutzen und erhalten:

$$V = G \cdot h = \frac{25}{4}\pi\ \text{cm}^2 \cdot 6\ \text{cm} = \frac{75}{2}\pi\ \text{cm}^3 \approx 117{,}81\ \text{cm}^3$$

Das Volumen beträgt etwa 117,81 cm^3.

Die **Oberfläche** des Zylinders lässt sich relativ einfach berechnen. Stellen wir uns vor, dass wir den Mantel des Zylinders abrollen: Wir erhalten dann ein Rechteck mit der Höhe h des Zylinders und dem Umfang U des Kreises als Seiten.

Mantelfläche eines Zylinders

$$M = U \cdot h$$

Oberfläche eines Zylinders

$$O = 2 \cdot G + M$$

OBERFLÄCHE ZYLINDER:

Beispiel
Wir betrachten denselben Zylinder wie im vorherigen Beispiel. Dann gilt für den Umfang:

$$U = 2\pi r = 5\pi\ \text{cm}$$

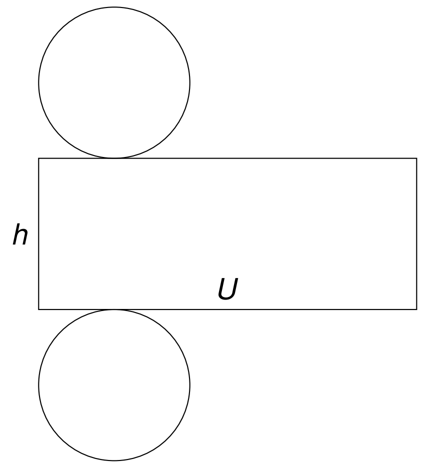
Wir können somit die Mantelfläche ausrechnen:

$$M = U \cdot h = 5\pi\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} = 30\pi\ \text{cm}^2$$

Mit der Oberflächenformel erhalten wir:

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot G + M \\ &= 2 \cdot \frac{25}{4}\pi \text{ cm}^2 + 30\pi \text{ cm}^2 \\ &= \frac{85}{2}\pi \text{ cm}^2 \approx 133{,}52 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Somit beträgt der Oberflächeninhalt 133,52 cm^2.



11.4 Kegel

Nachdem wir uns nach den Prismen mit Pyramiden auseinandergesetzt haben, ist es nicht verwunderlich, dass es auch für Zylinder eine abgewandelte Figur gibt, die spitz nach oben zuläuft. Diese heißen **Kegel**. Das Volumen des Kegels berechnet sich wie bei einer Pyramide. Der einzige Unterschied liegt in der Grundfläche, die beim Kegel kreisförmig ist.

VOLUMEN KEGEL:

OBERFLÄCHE KEGEL:

Volumen eines Kegels

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Beispiel
Gegeben sei ein Kegel mit dem Radius $r = 3$ m und einer Höhe von $h = 7$ m. Dann errechnen wir das Volumen durch

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (3 \text{ m})^2 \cdot 7 \text{ m} \\ &= 21\pi \text{ m}^3 \approx 65{,}97 \text{ m}^3. \end{aligned}$$