Inhalt

1 Teilbarkeit und Vielfache

Aus dem letzten Jahr wissen wir bereits, wie wir zwei Zahlen **dividieren** (teilen) sowie **multiplizieren** (Mal nehmen). *Teiler und Vielfache bestimmen* funktioniert sehr ähnlich. Dazu schauen wir uns zunächst an, was ein *Teiler* ist und gehen dann auf *Vielfache* ein.

1.1 Teiler

Wenn wir noch einmal genauer an die **Division** zurückdenken, erinnern wir uns bestimmt auch daran, dass es Ergebnisse **mit** und Ergebnisse **ohne Rest** gab. Wenn wir zum Beispiel 56 durch 5 teilen, dann lautet das Ergebnis: 11 Rest 1, da $5 \cdot 11 + 1 = 56$ ist. Der **Teiler** einer Zahl ist ein Divisor, für den kein Rest bleibt. Die 5 ist also kein Teiler von 56, da ein Rest von 1 bleibt. Aber die 2 ist zum Beispiel ein Teiler, da 56 : 2 = 28 Rest 0.

1.1.1 Teilermenge bestimmen

Eine **Menge** können wir als eine Zusammenfassung von mehreren Elementen, in unserem Fall Zahlen, verstehen. Die **Teilermenge** $\mathcal{T}$ umfasst also alle Teiler einer Zahl. Wir schreiben Teilermengen mit geschwungenen Klammern, zwischen denen alle Teiler stehen.

Beispiel 1.1 *Wir betrachten einmal die Zahl* 6 *und wollen die Teilermenge bestimmen. Dafür fangen wir vorne an und arbeiten uns Schritt für Schritt bis zu der* 6 *selbst weiter vor.*

- *Ist die* 1 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Ja, denn* 6 : 1 = 6 *Rest* 0
- *Ist die* 2 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Ja, denn* 6 : 2 = 3 *Rest* 0
- *Ist die* 3 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Ja, denn* 6 : 3 = 2 *Rest* 0
- *Ist die* 4 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Nein, denn* 6 : 4 = 1 *Rest* 2
- *Ist die* 5 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Nein, denn* 6 : 5 = 1 *Rest* 1
- *Ist die* 6 *ein Teiler?* $\rightarrow$ *Ja, denn* 6 : 6 = 1 *Rest* 0

Somit können wir die Teilermenge schreiben als: $\mathcal{T}_6 = \left\{1; 2; 3; 6\right\}$.

Aufgabe 1.1.3 *Bestimme die Teilermenge von:*

a) 27 *b)* 36 *c)* 60 *d)* 18 *e)* 9 *f)* 100

1.1.2 Größter gemeinsamer Teiler

Wenn nach einem größten gemeinsamen Teiler gefragt ist, bezieht sich das immer auf mindestens zwei **Dividenden**. Jeder Dividend hat eine eigene Teilermenge und Zahlen, die in allen Teilermengen vorkommen, sind gemeinsame Teiler. Der **größte Teiler, der in allen Teilermengen vorkommt**, ist der größte gemeinsame Teiler. Dieser wird oft auf als ***ggT*** abgekürzt.

Beispiel 1.3 *Betrachten wir die beiden Zahlen 12 und 18. Als erstes bilden wir die Teilermenge von beiden Zahlen:*

$$\mathcal{T}_{12} = \{1;2;3;4;6;12\} \text{ und } \mathcal{T}_{18} = \{1;2;3;6;9;18\}$$

GRÖSSTER GEMEINSAMER TEILER:

Dann unterstreichen wir alle Zahlen, die in beiden Mengen vorkommen:

$$\mathcal{T}_{12} = \{\underline{1};\underline{2};\underline{3};4;\underline{6};12\} \text{ und } \mathcal{T}_{18} = \{\underline{1};\underline{2};\underline{3};\underline{6};9;18\}$$

Es gibt vier Zahlen, die in beiden Mengen vorkommen, aber die 6 ist davon die größte. Somit ist 6 der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18. Wir schreiben also $ggT(12;18) = 6$.

Aufgabe 1.1.4 *Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von:*

a) 6 *und* 8 *c)* 28 *und* 30 *e)* 12 *und* 40

b) 12 *und* 16 *d)* 7 *und* 13 *f)* 25 *und* 100

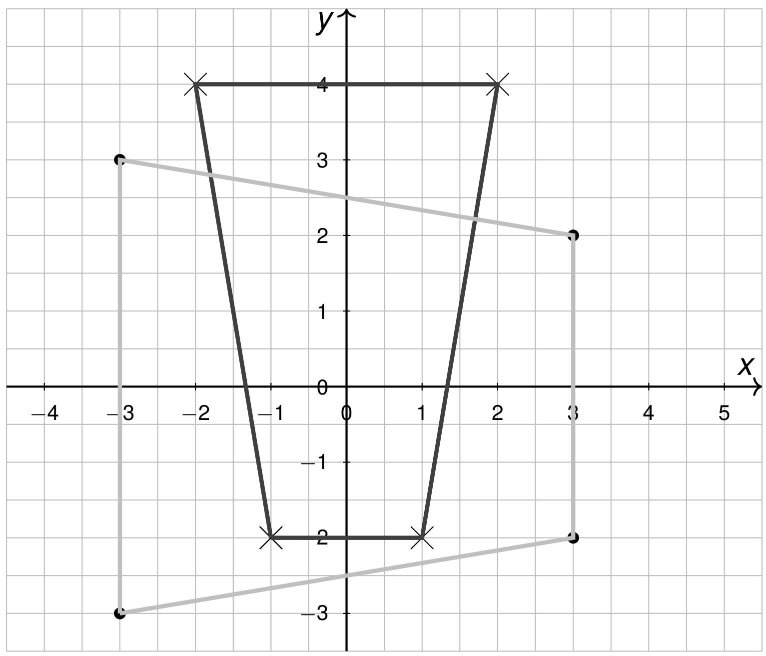
Aufgabe 1.1.5 *Fülle die Tabelle aus, indem du immer den größten gemeinsamen Teiler in das richtige Feld schreibst.*

ggT	2	8	18	22	42
6				6	
12			6		
28					
35		1			

> Ein Achsenkreuz, oder auch Koordinatensystem, besteht aus einer x-Achse und einer y-Achse und wird verwendet, um Punkte im sogenannten **kartesischen Koordinatensystem** einzuzeichnen. Die x-Achse ist dabei die Links-Rechts-Achse und die y-Achse die Oben-Unten-Achse. Durch die Achsen wird ein Gitter aufgespannt, welches es uns vereinfacht die Punkte einzuzeichnen.

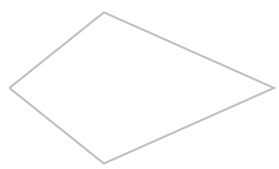
Betrachten wir die beiden folgenden Vierecke. Stellen wir uns einmal vor, dass wir das Blatt an der x-Achse knicken. Dann würden sich die beiden linken Punkte, oberhalb und unterhalb der x-Achse, des helleren Vierecks treffen, ebenso wie die beiden rechten Punkte. Somit ist das Viereck ***x*-Achsensymmetrisch**. Das dunklere Viereck hingegen ist ***y*-Achsensymmetrisch**.

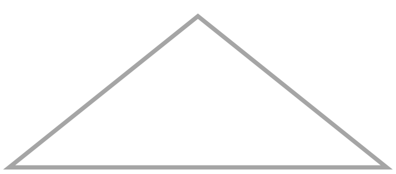
ACHSENSYMMETRIE:

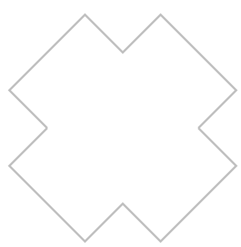


Aufgabe 6.1.1 *Zeichne die Symmetrieachsen ein.*

a)

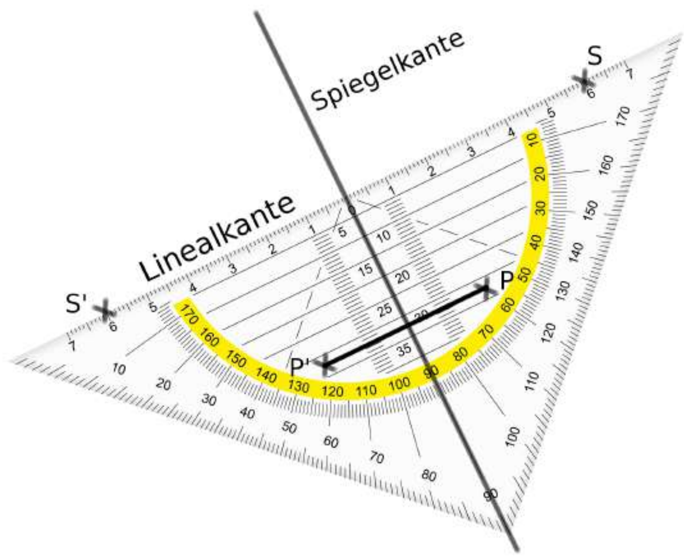
c)


b)


d)


6.2 Achsenspiegelung

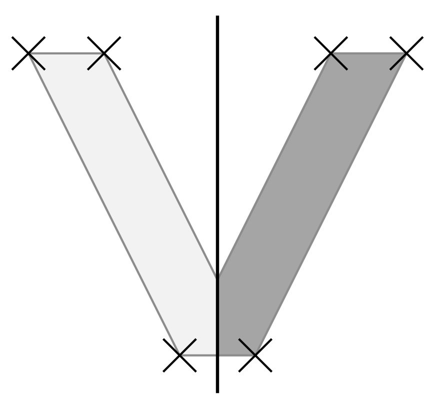
Jetzt wollen wir eine Figur selber an einer Achse spiegeln. Dabei gibt es einen einfachen Trick mit dem Geodreieck: Wir legen das Geodreieck mit dem senkrechten Strich, der von der Null bis zur Spitze geht, an die Spiegelachse an. Dann fahren wir mit dem Geodreieck auf der Spiegelachse hin und her, sodass der Strich auf der Spiegelachse bleibt und platzieren das Geodreieck damit so, dass der Punkt den wir spiegeln wollen, genau an der Linealkante anliegt. Liegt der Punkt z.B. bei der 6, so zeichnen wir einen Punkt auf der anderen Seite vom Geodreieck bei der 6. So gehen wir mit allen Punkten vor, bis wir alle Eckpunkte der Figur gespiegelt haben.



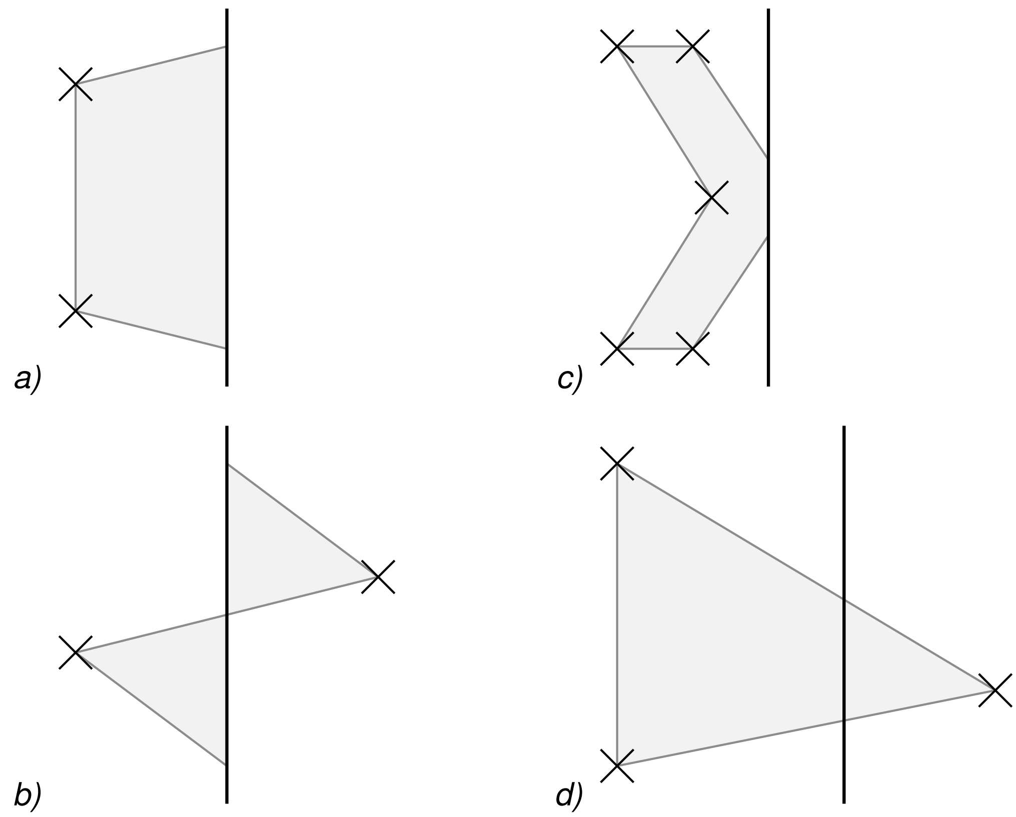
Achsenspiegelung:

Die beiden Punkte P und P’, sowie S und S’ haben den selben Abstand von der Spiegelachse. Außerdem sind die Strecken senkrecht, also im Winkel von 90° zur Spiegelachse.

Beispiel 6.1 *Jeder Punkt auf der hellgrauen Seite wurde an der Spiegelachse gespiegelt, also mit einem identischen Abstand auf der anderen Seite eingetragen. Insgesamt ergibt sich der Buchstabe V:*



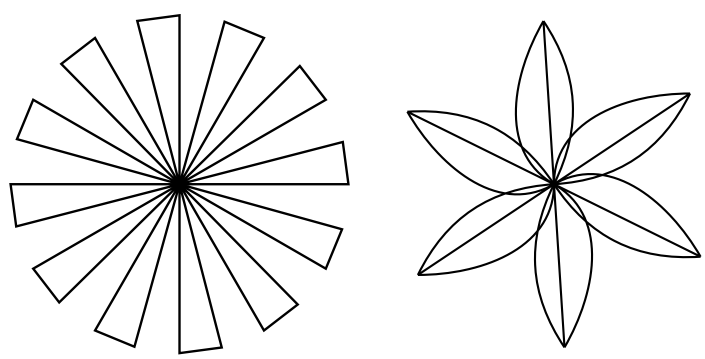
Aufgabe 6.2.1 *Spiegel die folgenden Figuren an der gegebenen Spiegelachse.*



6.3 Drehsymmetrie

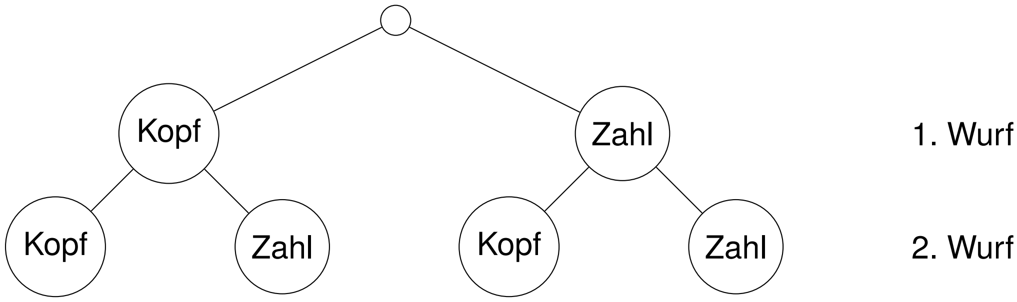
Eine Figur ist genau dann drehsymmetrisch, wenn sie sich von einem Punkt aus um einen bestimmten Winkel drehen lassen und die Figur danach wieder genau so aussieht wie vorher. Der Punkt um den wir drehen, nennen wir das **Drehzentrum**. **Achtung:** Jede Figur lässt sich natürlich um 360° drehen und sieht dann wieder aus wie vorher, aber darum geht es hier nicht. Betrachten wir zwei Beispiele:

PUNKTSYMMETRIE:

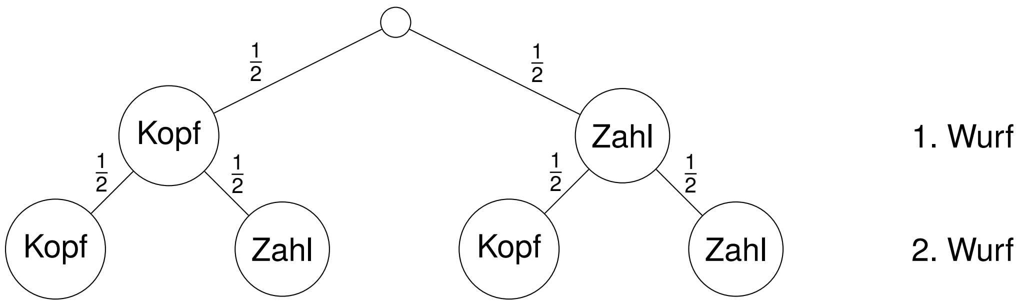


Die linke Figur lässt sich um 30°, 60°, 90° und jeweils in 30-ger Schritten weiter drehen und sieht denn jedes mal aus wie vorher. Die rechte Figur lässt sich um 60°, 120° und so weiter drehen ohne sich zu verändern. Viele drehsymmetrische Figuren lassen sich nur um 180° drehen, wie zum Beispiel das Rechteck, oder:

Die Ergebnisse können wir in einem Baumdiagramm darstellen, wobei eine Ebene jeweils für die Durchführung eines Experimentes steht und ein Ergebnis ein **Pfad** ist.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ich im ersten Wurf Kopf werfe beträgt $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit im zweiten Wurf Kopf zu werfen, beträgt wieder $\frac{1}{2}$. Dies können wir in unser Baumdiagramm eintragen:



Die Wahrscheinlichkeit, dass in beiden Würfen Kopf geworfen wird, ist somit $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ also $\frac{1}{4}$ = 25%. Ich hatte somit unrecht mit meiner Aussage am Anfang. Wir haben gerechnet: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Die Einzelwahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden multipliziert und wir erhalten die Gesamtwahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses.

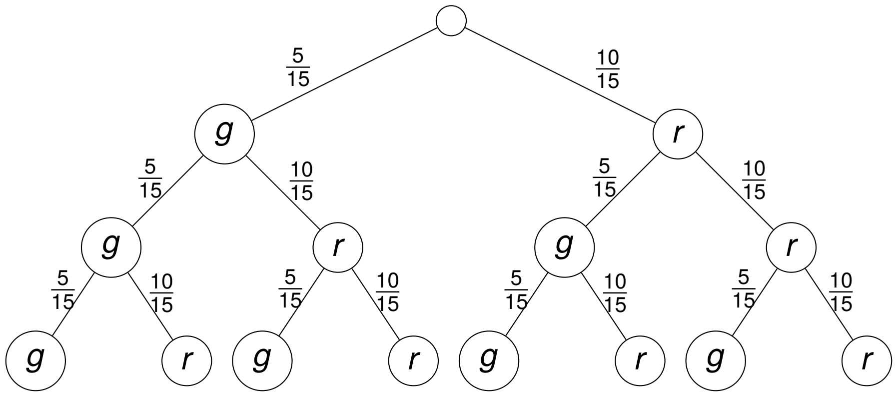
> Mehrstufige Zufallsexperimente können wir durch Baumdiagramme veranschaulichen. Ein Ergebnis ist ein Pfad in diesem Baum.
>
> **Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhalten wir indem wir die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multiplizieren.

PRODUKTREGEL:

SUMMENREGEL:

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, zum Beispiel mindestens einmal Zahl werfen, erhalten wir indem wir erst die Pfadregel und dann die Summenregel anwenden. Wir berechnen mit der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse $\{$Kopf+Zahl; Zahl+Kopf; Zahl+Zahl$\}$ und addieren diese: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 75\%$

Beispiel 8.5 *Wir haben eine Urne in der zehn rote und fünf grüne Kugeln sind. Wir wollen drei-Mal ziehen und die Kugel jeweils immer zurücklegen. Das Baumdiagramm sieht dann wie folgt aus:*



Die Wahrscheinlichkeit drei rote Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} = \frac{1000}{3375} = \frac{8}{27} = 29{,}6\%$$

Die Wahrscheinlichkeit drei grüne Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{125}{3375} = \frac{1}{27} = 3{,}70\%$$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei grüne Kugeln zu ziehen ist:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = 25{,}02\%$$

Aufgabe 8.4.1 *Sergej zieht drei-Mal hintereinander jeweils eine Spielkarte aus einem Kartenblatt wie in Aufgabe 8.2.1 und mischt diese nach dem Anschauen wieder ins Deck.*

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nur rote Karten gesehen hat?*

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei schwarze Karten gezogen hat?*

c) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Kreuz-Sieben gesehen hat?*

Überlegt genau, für was ihr ein Baumdiagramm braucht und welche Informationen ihr darstellen müsst!

Aufgabe 8.4.2 *Christoph fährt nach der Arbeit immer mit dem Zug nach Hause. Dort trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von* 50% *Karli und mit einer Wahrscheinlichkeit von* 75% *trifft er Petra. Vor dem Einsteigen denkt er sich: „Laut der Summenregel werde ich wohl wenigstens einen der beiden mit einer Wahrscheinlicheit von* 125% *treffen.“ Kann die Wahrscheinlichkeit höher als* 100% *sein? Und beim Aussteigen hat er noch weder Karli oder Petra gesehen. Wo denkt Christoph falsch?*