Inhalt

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Zeichnerisch lösen

Aufgabe 12: Löse die folgenden Gleichungen grafisch.

LGS zeichnerisch lösen

a) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 3x+6 \\ \text{II} & y & = & 9x-3 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 12x-2 \\ \text{II} & y & = & 4x \end{array}$

c) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 6x \\ \text{II} & y & = & 12x-12 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 2x+4 \\ \text{II} & y & = & 6x+2 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & -7x+2 \\ \text{II} & y & = & 2x+2 \end{array}$

f) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & -3x+9 \\ \text{II} & y & = & -6x+18 \end{array}$

2.2 Lösen durch Rechnen

Aufgabe 13: Löse das LGS mit dem Einsetzungsverfahren.

Einsetzungsverfahren

a) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & t & = & 4x+8 \\ \text{II} & 5x+2t & = & 9{,}5 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & w & = & 2a+2 \\ \text{II} & 15w-a & = & 1 \end{array}$

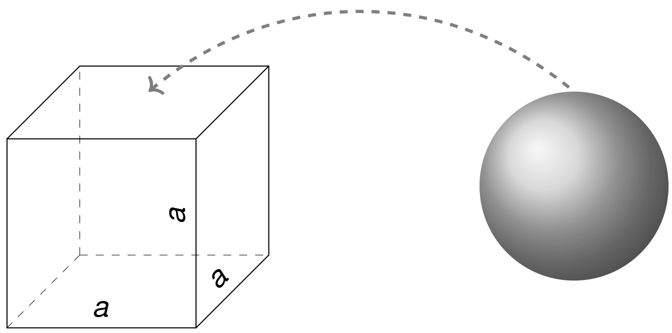
c) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & 9r+3 & = & 3k \\ \text{II} & 4k+8r & = & 24 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 3a+4b \\ \text{II} & a & = & -2b+4 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & 12x-7 & = & -y \\ \text{II} & -4x+2y & = & 14 \end{array}$

f) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2t+2s & = & 27 \\ \text{II} & -3t+4{,}5 & = & s \end{array}$

Aufgabe 55: In die abgebildete Kiste, bei der alle Seiten $a = 10\,\text{cm}$ lang sind, soll eine möglichst große Kugel gelegt werden. Berechne, wie groß der Radius der Kugel maximal sein kann. Bestimme anschließend, wie viel Prozent das Volumen der Kugel in der Kiste einnimmt.



Aufgabe 56: Es soll ein Schwimmbad mit den Maßen $20 \cdot 50$ Metern und einer Wassertiefe von 3 Metern gebaut werden.

a) Als erstes muss dafür die Erde ausgegraben werden. Eine Maschine schafft pro Stunde ein Volumen von $12\,\text{m}^3$. Wie viele Stunden benötigt eine Maschine bzw. wie lange würde benötigt werden, wenn 4 Maschinen zur Verfügung stünden?

b) Anschließend wird das Becken gefliest. Berechne, wie viele m^2 Fliesen benötigt werden, wenn alle Seitenflächen und der Boden mit Fliesen ausgelegt werden sollen.

c) Eine einzelne Fliese hat eine Größe von $0{,}5 \cdot 0{,}5$ Metern.
Wie viele Fliesen werden insgesamt benötigt?

6 Körper berechnen

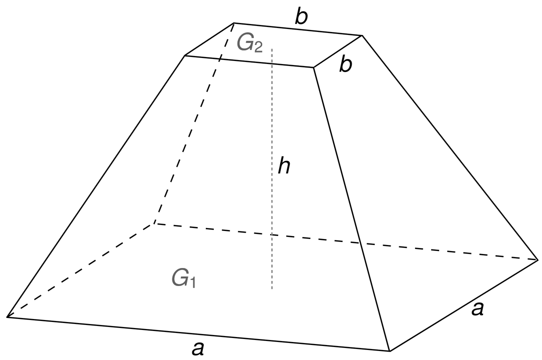
6.1 Pyramidenstumpf berechnen

Aufgabe 57: Gegeben sind die Werte eines quadratischen Pyramidenstumpfes. Berechne jeweils die fehlenden Angaben.

Pyramiden-
stumpf

a) $a = 5\,\text{cm}$, $b = ?$, $h = 1\,\text{dm}$, $G_1 = ?$, $G_2 = 1\,\text{cm}^2$, $O = ?$, $V = ?$

b) $a = ?$, $b = ?$, $h = ?$, $G_1 = 81\,\text{cm}^2$, $G_2 = 36\,\text{cm}^2$, $O = ?$, $V = 200\,\text{cm}^3$



Aufgabe 58: Tim möchte das Volumen eines Pyramidenstumpfes bestimmen. Er weiß, dass die Höhe 10 cm beträgt. Zusätzlich ist ihm bekannt, dass die untere Grundfläche quadratisch ist und einen Flächeninhalt von $100\,\text{cm}^2$ hat. Die Seitenlänge der oberen quadratischen Grundfläche beträgt 64% der unteren Grundfläche. Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes.

Aufgabe 59: Wir wissen, dass die untere quadratische Grundfläche doppelt so groß ist, wie die obere quadratische Grundfläche, wobei die untere $25\,\text{cm}^2$ groß ist. Die Höhe kennen wir jedoch nicht. Allerdings wissen wir auch, dass die Mantelfläche insgesamt $200\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die Höhe sowie im Anschluss den gesamten Oberflächeninhalt der quadratischen Pyramide.

Aufgabe 60: Ein Haus mit einer quadratischen Grundfläche soll noch um eine weitere Etage ergänzt werden. Die Ergänzung findet in Form eines Pyramidenstumpfes statt. Die untere Grundfläche entspricht der Grundfläche des Hauses, welches einen Flächeninhalt von $156{,}25\,\text{m}^2$ hat. Die Höhe des neuen Geschosses soll 2,4 Meter betragen. Das Volumen der neuen Etage soll $244{,}4\,\text{m}^3$ betragen. Welche Länge haben die Seiten der oberen Fläche des Pyramidenstumpfes?

7 Statistik (Daten)

7.1 Diagramme

7.1.1 Kreisdiagramm

Aufgabe 73: 30 Schüler einer Schulklasse haben ihre Klassenarbeit in Mathe zurückbekommen und wollen die nachfolgende Notenverteilung grafisch in einem Kreisdiagramm darstellen. Sie können es noch nicht und bitten dich daher, dass du ein solches Kreisdiagramm für sie erstellst. Die Notenverteilung sieht dabei wie folgt aus:

Übersicht

Kreis-diagramm

Note	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	4	7	8	8	2	1
relative Häufigkeit						
Grad im Kreis						

Aufgabe 74: In einer Klasse werden die Schüler nach ihrem Lieblingsfach befragt. Sie können sich die Verteilung aber noch nicht vorstellen und daher soll ein Kreisdiagramm mit den Lieblingsfächern der Schüler erstellt werden.

Fach	**relative Häufigkeit**	**Grad im Kreis**
Kunst	0,08	
Musik	0,02	
Sport	0,12	
Mathe	0,15	
Deutsch	0,30	
Englisch	0,15	
Geschichte	0,06	
Bio	0,12	

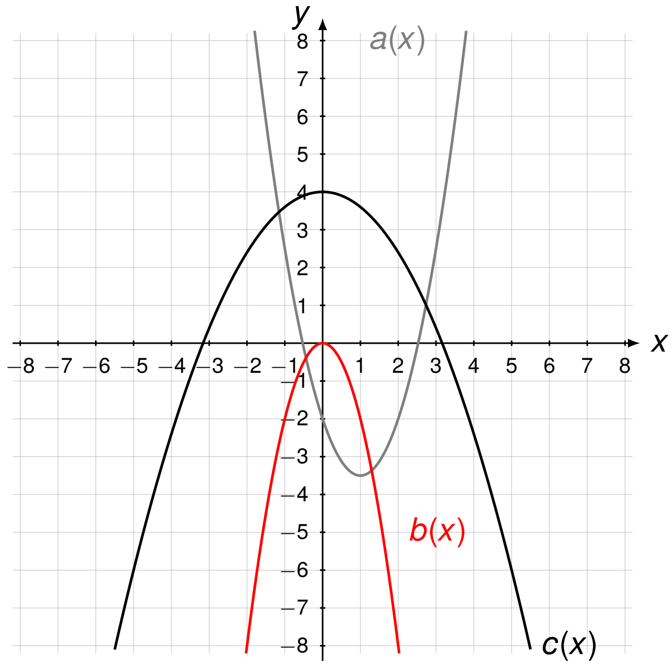
A Lösungen

zu Quadratische Gleichungen

zu Aufgabe 1: Wenn wir quadratische Funktionen zeichnen möchten, sollte zunächst eine Wertetabelle angelegt werden. Da der Bereich -3 bis $+3$ durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist, berechnen wir die Funktionswerte zwischen diesen Werten in 1er-Schritten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a(x)$	20,5	10	2,5	-2	$-3{,}5$	-2	$-2{,}5$
$b(x)$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18
$c(x)$	0,4	2,4	3,6	4	3,6	2,4	0,4

Anschließend zeichnen wir ein geeignetes Koordinatensystem[1], tragen alle berechneten Punkte ein und verbinden diese zum jeweiligen Funktionsgraphen.



[1] Wir haben das etwas größer gezeichnet, um die Verläufe der Funktionen besser zu sehen.

Um anzugeben, wie viel Platz die Kugel in der Kiste einnimmt, müssen wir vorher noch das Volumen des Würfels berechnen:

$$V_{\text{Quader}} = a^3 = 10^3 = 1\,000\ [\text{cm}^3]$$

Der prozentuale Anteil berechnet sich dann über den Quotienten:

$$\text{Anteil} = \frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Quader}}} = \frac{523{,}60}{1\,000} = 0{,}5236$$

Damit nimmt die Kugel 52,36% des Platzes in der Kiste ein.

zu Aufgabe 56: Wir beantworten die Fragen zum Schwimmbad Schritt für Schritt.

a) Insgesamt müssen für das Schwimmbad

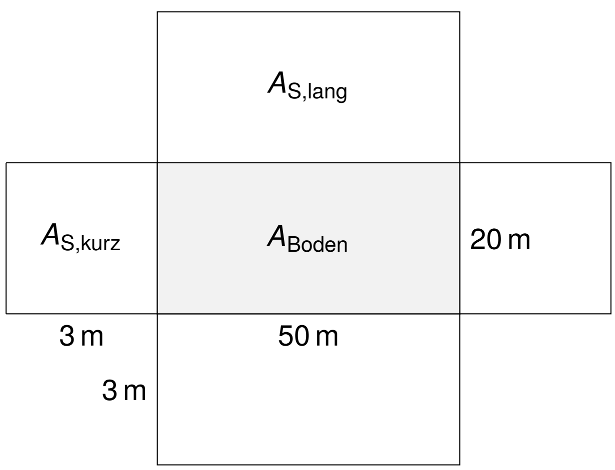
$$V = a \cdot b \cdot c = 20 \cdot 50 \cdot 3 = 3\,000\ [\text{m}^3]$$

ausgegraben werden. Eine Maschine kann 12 m^3 Erde pro Stunde ausgraben und benötigt

$$\text{Zeit} = \frac{3\,000}{12} = 250\ [\text{Stunden}].$$

Wenn wir nun aber 4 Maschinen zur Verfügung hätten, würden wir nur noch $\frac{1}{4}$ der Zeit benötigen, weil wir eine antiproportionale Zuordnung haben. Somit müssen wir die 250 Stunden durch 4 dividieren. Es würde also $\frac{250}{4} = 62{,}5$ Stunden dauern, wenn 4 Maschinen zur Verfügung stehen würden.

b) Wir machen uns zunächst eine kleine Skizze der zu fliesenden Flächen:



Der Boden des Schwimmbads wird durch die graue Fläche dargestellt. Zusätzlich zu dieser Fläche werden vier Seitenflächen gefliest. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_{\text{ges.}} &= A_{\text{Boden}} + 2 \cdot A_{\text{S,kurz}} + 2 \cdot A_{\text{S,lang}} \\ &= 20 \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 2 \cdot 50 \cdot 3 \\ &= 1\,000 + 120 + 300 \\ &= 1\,420\ [\text{m}^2] \end{aligned}$$

Es müssen insgesamt 1 420 m^2 gefliest werden.

zu Aufgabe 60: Auf ein Haus mit quadratischer Grundfläche wird ein Pyramidenstumpf gesetzt. Da die untere Grundfläche der Fläche des Hauses entspricht, gilt $G_1 = 156{,}25\,\text{m}^2$ und $a = \sqrt{G_1} = 12{,}5\,\text{m}$. Die Höhe des Stumpfes beträgt $h = 2{,}4\,\text{m}$ und das Volumen $V = 244{,}4\,\text{m}^3$. Mithilfe dieser Werte und der Volumenformel berechnen wir die gesuchte Seitenlänge b.

$$\begin{aligned}
& V &=& \tfrac{h}{3} \cdot (a^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2} + b^2) \quad \Big|\tfrac{3}{h} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{3 \cdot V}{h} &=& a^2 + \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} + b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{3 \cdot V}{h} &=& a^2 + a \cdot b + b^2 \quad \Big| \text{ Werte einsetzen} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{3 \cdot 244{,}4}{2{,}4} &=& 12{,}5^2 + 12{,}5 \cdot b + b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 305{,}5 &=& 156{,}25 + 12{,}5 \cdot b + b^2 \quad \Big| -305{,}5 \\
\Leftrightarrow\quad & b^2 + 12{,}5 \cdot b - 149{,}25 &=& 0
\end{aligned}$$

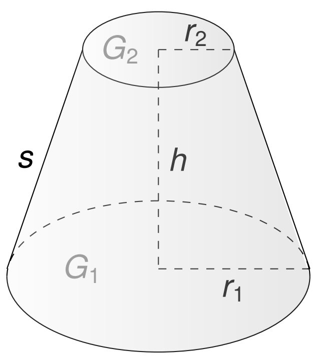
Wir haben eine quadratische Gleichung vorliegen und wenden die *pq*-Formel an. Mit $p = 12{,}5$ und $q = -149{,}25$ folgt:

$$b_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{12{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12{,}5}{2}\right)^2 + 149{,}25} = -6{,}25 \pm 13{,}72$$

Da nur positive Längen von Interesse sind, gilt für die Seitenlänge:

$$b = -6{,}25 + 13{,}72 = 7{,}47 \text{ [m]}$$

zu Aufgabe 61: Das Volumen eines Kegelstumpfes wird berechnet über:



$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

Wir stellen diese Formel bei den Teilaufgaben immer nach der gesuchten Größe um und setzen anschließend die gegebenen Werte ein. Bei c) müssen wir vorher noch die Einheiten vereinheitlichen.

a) Gesucht: V
Gegeben: $r_1 = 4\,\text{cm}$, $r_2 = 6\,\text{cm}$ und $h = 50\,\text{cm}$

Wir können die Werte einfach in die Formel einsetzen und erhalten:

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) = \frac{50 \cdot \pi}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 6 + 6^2) = \frac{50 \cdot \pi}{3} \cdot 76$$
$$\approx 3\,979{,}35\,\text{cm}^3$$

a) Die Summe der Augenzahl soll 7 sein. Dafür müssen wir uns einfach überlegen, welche Möglichkeiten es dafür gibt und schreiben sie auf:

$$\underbrace{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)}_{=\text{ 6 Möglichkeiten}}$$

Da es 6 von insgesamt 36 Möglichkeiten gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, beim zweimaligen Würfeln in Summe eine 7 zu bekommen, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \mathrel{\widehat{=}} 16{,}67\%$.

b) Die Summe der Augenzahl soll größer als 10 sein, also 11 und 12. Wir suchen uns wieder raus, welche Zahlenpaare in Frage kommen:

$$\underbrace{(5,6)\ (6,5)\ (6,6)}_{=\text{ 3 Möglichkeiten}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln in Summe eine 11 oder 12 zu bekommen, liegt bei $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \mathrel{\widehat{=}} 8{,}33\%$.

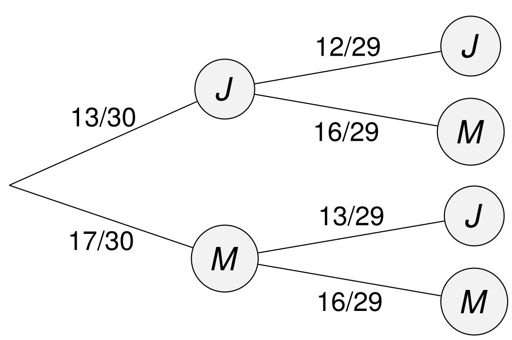
c) Das Produkt der Augenzahlen soll größer als 30 sein. Wir suchen uns wieder raus, welche Zahlenpaare in Frage kommen:

$$\underbrace{(6,6)}_{=\text{ 1 Möglichkeit}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln das Produkt der Augenzahlen größer als 30 ist, liegt bei $\frac{1}{36} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}78\%$.

zu Aufgabe 87: Bei dieser Aufgabe handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Das bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeiten von Stufe zu Stufe verändern.

a) Baumdiagramm:



Anhand des Baumdiagramms können wir direkt sehen, dass beim zweiten Ziehen nur noch 29 Leute bzw. Zettel zur Verfügung stehen, weil die gezogenen Zettel nicht wieder in die Box zurückgelegt werden.

b) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten mit den Pfadregeln.

(i) Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Mädchen gezogen werden, beträgt

$$P(M,M) = \frac{17}{30} \cdot \frac{16}{29} = \frac{272}{870} \approx 0{,}3126 \mathrel{\widehat{=}} 31{,}26\%.$$