Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Grundrechenarten

Wir unterscheiden grundsätzlich die vier folgenden Grundrechenarten mit ihren jeweiligen Komponenten. Mach dich mit den Begrifflichkeiten vertraut, da diese im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen und erwähnt werden.

Grundrechen-arten

Grundrechenart	Komponenten
Addition „+“	$\underbrace{2}_{\textbf{Summand}} + \underbrace{4}_{\textbf{Summand}} = \underbrace{6}_{\textbf{Summe}}$
Subtraktion „−“	$\underbrace{7}_{\textbf{Minuend}} - \underbrace{3}_{\textbf{Subtrahend}} = \underbrace{4}_{\textbf{Differenz}}$
Multiplikation „·“	$\underbrace{2}_{\textbf{Faktor}} \cdot \underbrace{3}_{\textbf{Faktor}} = \underbrace{6}_{\textbf{Produkt}}$
Division „:“ oder „÷“	$\underbrace{4}_{\textbf{Dividend}} : \underbrace{2}_{\textbf{Divisor}} = \underbrace{2}_{\textbf{Quotient}}$

1.2 Mengen

Nachfolgend findest du eine Übersicht über die wichtigsten und dir (hoffentlich bereits) bekannten Zahlenmengen.

Natürliche & ganze Zahlen

Rationale Zahlen

- Natürliche Zahlen[1]

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ → Natürliche Zahlen sind ganze, positive Zahlen

- Ganze Zahlen

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ → Ganze Zahlen sind sowohl ganze positive als auch ganze negative Zahlen mit der Null

- Rationale Zahlen

  $\mathbb{Q} = \{\dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{3}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots\}$ → Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen; Merke: Ganze Zahlen lassen sich auch als Bruch darstellen (z.B: $1 = \frac{1}{1}$)

- Reelle Zahlen

  $\mathbb{R} = \{\dots, \pi, \dots, \sqrt{2}, \dots\}$ → Reelle Zahlen sind alle Zahlen

[1] Es kann auch sein, dass die 0 nicht enthalten ist. Das ist nicht einheitlich. Frag bitte deinen Lehrer!

Größen	Umrechnung
Länge	1 km = 1.000 m
	1 m = 10 dm
	1 dm = 10 cm
	1 cm = 10 mm
Fläche	1 km^2 = 100 ha
	1 ha = 100 a
	1 a = 100 m^2
	1 m^2 = 100 dm^2
	1 dm^2 = 100 cm^2
	1 cm^2 = 100 mm^2
Volumen	1 m^3 = 1.000 dm^3
	1 dm^3 = 1.000 cm^3
	1 cm^3 = 1.000 mm^3
	1 l = 1 dm^3
	1 ml = 1 cm^3
Gewicht	1 t = 1.000 kg
	1 kg = 1.000 g
	1 g = 1.000 mg
Zeit	1 Jahr = 12 Monate = 52 Wochen = 365 Tage
	1 Tag = 24 Stunden
	1 Stunde = 60 Minuten
	1 Minute = 60 Sekunden

1.7 Aufgaben

Lösungen

A.1.1 Bearbeite die folgenden Aufgaben.

a) Addiere die Zahlen 45 und 121.

b) Bestimme die Differenz der Zahlen 1.412 und 42.

c) Multipliziere die Zahlen 8 und 16.

d) Der Dividend ist 144, der Divisor ist 12. Bestimme den Quotienten.

A.1.2 Gegeben sind folgende Zahlen: 121; 56; 150; 58; 190; 320. Welche beiden Zahlen musst du verwenden, damit...

a) ...du eine möglichst große Summe erhältst?

b) ...du eine möglichst große Differenz erhältst?

c) ...die Summe größer als 250, aber kleiner als 300 ist?

d) ...eine möglichst kleine Differenz erhältst?

6.1 Proportionale Zuordnungen

Proportionale Zuordnung

Wir schauen uns zunächst an, wie Aufgaben zu proportionalen Zuordnungen gelöst werden können. **Beispiel**:

3 kg feinstes Rinderfilet kosten 147 Euro. Peter und Susanne brauchen 7 kg Fleisch, weil sie die ganze Familie zum Essen einladen wollen. Jetzt lautet die Frage: Wie teuer sind eigentlich 7 kg feinstes Rinderfilet?

Wir werden uns jetzt verschiedene Wege und Schreibweisen angucken, mit denen es möglich ist, eine solche Aufgabe zu lösen. Du kannst dir dann den Lösungsweg heraussuchen, der für dich am besten geeignet ist.

Die wohl am häufigsten vorkommende Methode ist die Dreisatztabelle.

Wir erstellen eine Tabelle mit zwei Spalten und tragen links das Gewicht und rechts den Preis ein. Direkt in der Zeile darunter unsere bekannten Werte:

Gewicht (in kg)	Preis (in Euro)
3	147

Als nächstes überlegen wir uns, wie wir den Preis für 7 kg berechnen können. Wir kommen nicht durch eine einfache Multiplikation direkt von den 3 kg zu den 7 kg. Aber wir könnten ja in einem Zwischenschritt den Preis für 1 kg Rinderfilet berechnen. Dazu teilen wir auf beiden Seiten unserer Tabelle durch 3:

	Gewicht (in kg)	Preis (in Euro)	
	3	147	
$\div 3$	1	49	$\div 3$

Jetzt wissen wir zumindest schon mal, dass 1 kg Rinderfilet 49 Euro kostet.

Wir möchten aber wissen, wie teuer 7 kg Rinderfilet sind. Dazu multiplizieren wir auf beiden Seiten mit 7:

	Gewicht (in kg)	Preis (in Euro)	
	3	147	
$\div 3$	1	49	$\div 3$
$\cdot 7$	7	343	$\cdot 7$

7 kg feinstes Rinderfilet kosten also 343 Euro.

Weiteres Beispiel:

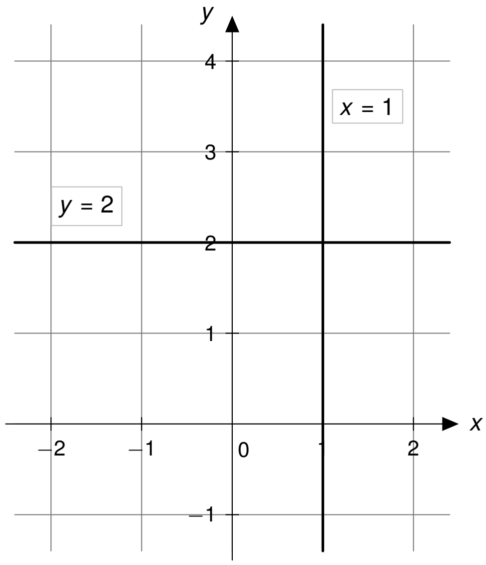
15 kg feinstes Schweinefilet kosten 70 Euro und Susanne benötigt 9 kg. Wie teuer sind die 9 kg Schweinefilet?

Du musst nicht immer die Zahl 1 als Zwischenschritt wählen, unter Umständen kannst du mit anderen Werten einfacher rechnen:

8.4 Parallele Geraden zur x- und zur y-Achse

Konstante Funktion

Wir schauen uns in der folgenden Abbildung besondere Lagen von Geraden an.



Wir sehen zwei Geraden, zum einen $y = 2$ und zum anderen $x = 1$. Parallele Geraden zur x-Achse geben immer an, an welcher Stelle die y-Achse geschnitten wird. Parallele Geraden zur y-Achse geben immer an, an welcher Stelle die x-Achse geschnitten wird.

Merke: Parallele Geraden zur y-Achse stellen keinen Graphen einer linearen Funktion dar. Warum? Es werden einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet.

8.5 Aufgaben

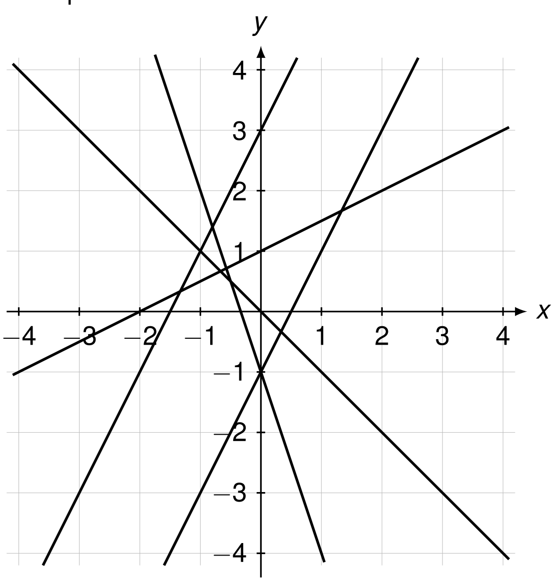
Lösungen

A.8.1 Gib jeweils die Steigung und den Schnittpunkt mit der y-Achse an. Gib auch an, ob der Graph fällt oder steigt.

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = -0{,}1x + 9$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$
d) $f(x) = -5x - 1$
e) $f(x) = 2{,}2x - 0{,}2$

A.8.2 Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu.

a) $y = 2x + 3$
b) $y = -3x - 1$
c) $y = 2x - 1$
d) $y = -x$
e) $y = 0{,}5x + 1$

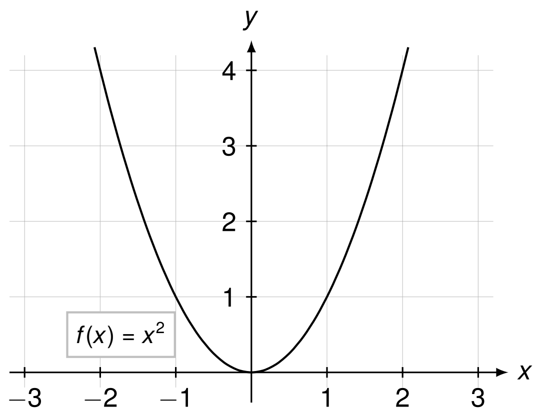


13 Quadratische Funktionen

Was ist eine quadratische Funktion? Der Graph einer quadratischen Funktion ist immer eine Parabel. Zu Beginn schauen wir uns einmal die sogenannte Normalparabel

$$f(x) = x^2$$

an. Wir sehen, dass die Normalparabel ihren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung $(0|0)$ hat. Der Scheitelpunkt ist der tiefste oder höchste Punkt einer Parabel.



Diese Normalparabel können wir auf verschiedene Arten und Weisen transformieren (verändern oder manipulieren). Das bedeutet, dass wir

Normalparabel

- ihren Scheitelpunkt in x-Richtung verschieben (nach links oder nach rechts)
- in y-Richtung verschieben (nach oben oder nach unten)
- sie strecken (schmaler machen) oder stauchen (breiter machen)
- sie an der x-Achse spiegeln, so dass ihre Öffnung nach unten zeigt

13.1 Verschiebung in x-Richtung

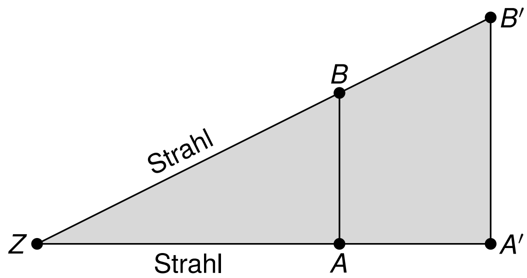
Die Verschiebung in x-Richtung können wir in unserer Funktionsgleichung wie folgt berücksichtigen. Dazu werfen wir einen Blick auf das folgende Koordinatensystem. Der Scheitelpunkt dieser Parabel und alle anderen Punkte wurden ausgehend von der Normalparabel (hier: $g(x) = x^2$) um 2 Einheiten nach rechts verschoben.

Verschiebungen

Wenn wir einen Blick auf die Funktionsgleichung werfen, sehen wir, dass sie wie folgt lautet:

15.3 Strahlensätze

Wir brauchen, um die Strahlensätze anwenden zu dürfen, zwei Strahlen, welche von einem Streckzentrum (Z) aus wegführen. Außerdem benötigen wir zwei parallele Geraden, welche die Strahlen in jeweils zwei Punkten schneiden. Eine Strahlensatz-Figur sieht im Prinzip genauso aus wie unsere zuvor gestreckten Dreiecke:



Bei dieser Strahlensatz-Figur gelten die folgenden zwei Strahlensätze:

1. Strahlensatz: $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$ oder $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$

2. Strahlensatz: $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{ZA'}}{\overline{A'B'}}$ oder $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

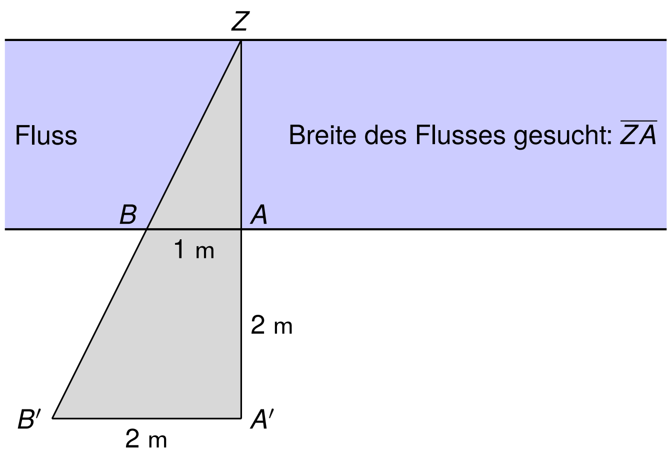
1. Strahlensatz

2. Strahlensatz

Der erste Strahlensatz setzt also nur Abschnitte der beiden Strahlen in ein Verhältnis zueinander. Der zweite Strahlensatz setzt sowohl die Abschnitte der Strahlen als auch die parallelen Geraden in ein Verhältnis zueinander.

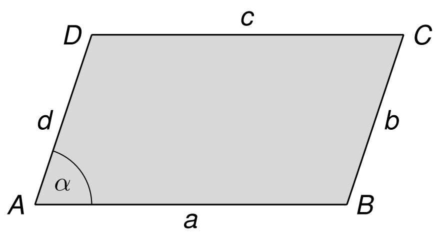
Dazu wollen wir die folgende **Aufgabe** lösen: Auf der vorderen Seite eines Flussufers werden in 2 m Entfernung vom Flussufer zwei Punkte abgesteckt (A' und B'). Diese beiden Punkte befinden sich 2 m voneinander entfernt. Außerdem werden direkt am Flussufer zwei weitere Punkte in einer Entfernung von 1 m markiert. Bestimme die Breite des Flusses ($\overline{ZA}$).

Die folgende Skizze zeigt den genauen Aufbau:



A.17.16 Das Wohnzimmer von Familie Kattensu soll mit Parkett ausgelegt werden. Die Parketthölzer haben die Form von Parallelogrammen mit der Grundseite $a = 25$ cm und der Höhe $h = 5$ cm. Das Wohnzimmer ist 42 m^2 groß. Wie viele Parketthölzer werden benötigt, wenn für den Verschnitt 10 % mehr Hölzer eingeplant werden?

A.17.17 Beschreibe, welchen Einfluss der Winkel α auf den Flächeninhalt des Parallelogramms hat.



A.17.18 Zeichne ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(-2|1)$, $B(4|1)$, $C(3|5)$ in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm. Bestimme den Flächeninhalt!

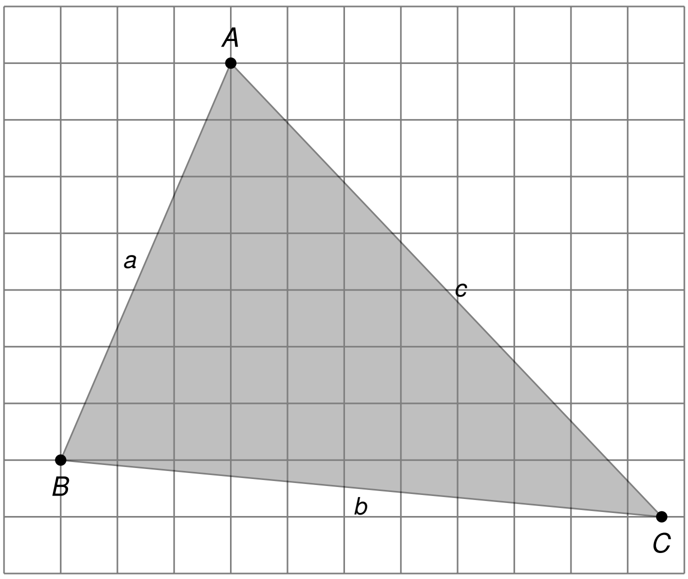
A.17.19 Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $g = 5$ cm und der Höhe $h = 3$ cm. Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn...

- ...die Höhe...
- ...die Höhe und die Grundseite...
- ...die Grundseite...

...verdoppelt werden?

A.17.20 Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck hat die Schenkellänge 6 dm. Bestimme den Flächeninhalt.

A.17.21 Übertrage das Dreieck in dein Heft (1 Kästchen ≙ 1 cm). Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei verschiedene Weisen. Miss benötigte Strecken in der Zeichnung ab und stelle deine Lösungswege dar.



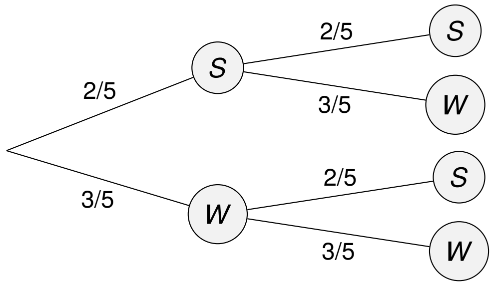
A.17.22 Berechne den Umfang U des Kreises.

a) $r = 7$ cm b) $d = 0{,}5$ m c) $r = \frac{4}{5}$ dm d) $A = 50$ cm^2

A.17.23 Berechne den Flächeninhalt A des Kreises.

a) $r = 8$ cm b) $d = 4$ m c) $r = 0{,}9$ dm d) $U = 24$ cm

A.17.24 Berechne den Flächeninhalt A eines Kreisrings mit $r_1 = 2$ dm und $r_2 = 7$ cm.



Mehrstufiger Zufallsversuch

Wir sehen auf der ersten Stufe, welche den ersten Zug darstellt, dass die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen $P(\text{schwarz}) = \frac{2}{5}$ beträgt. Es gibt insgesamt fünf Kugeln von denen 2 schwarz sind. Die Wahrscheinlichkeit beim ersten Zug eine weiße Kugel zu ziehen, beträgt $P(\text{weiß}) = \frac{3}{5}$, denn von unseren insgesamt fünf Kugeln sind drei Kugeln weiß. Da wir unsere erste gezogene Kugel in jedem Fall wieder zurück in die Urne legen, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten beim zweiten Zug nicht, denn die Voraussetzungen sind wieder die gleichen wie vor dem ersten Zug.

Dazu wollen wir uns die folgenden Fragen angucken und beantworten:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln zu ziehen?

Zuerst überlegen wir uns, welcher Pfad das gefragte Ereignis repräsentiert. Wir werfen einen Blick auf unseren Baum und sehen, dass der oberste Pfad von links nach rechts gesehen unser Ereignis schwarz, schwarz darstellt. Wir berechnen unsere Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades mit der **Pfadmultiplikationsregel**. Für unseren Fall gilt:

$$P(\text{schwarz}|\text{schwarz}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln zu ziehen liegt bei 16 %.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel und eine weiße Kugel zu ziehen?

Zu diesem Ereignis gehören sowohl der Pfad schwarz - weiß als auch der Pfad weiß - schwarz. Wir müssen jetzt die Wahrscheinlichkeit für beide Einzelpfade berechnen und anschließend addieren. Dabei handelt es sich um die sogenannte **Pfadadditionsregel**. Also:

$$P(\text{schwarz}|\text{weiß}) + P(\text{weiß}|\text{schwarz}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 48\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit sowohl eine schwarze als auch eine weiße Kugel zu ziehen beträgt demnach 48 %.

Als nächstes wollen wir uns den gleichen Zufallsversuch erneut angucken. Dieses Mal legen wir die Kugel nach dem ersten Zug aber nicht wieder zurück in die Urne. Es handelt sich also jetzt um einen Zufallsversuch ohne Zurücklegen. Auch diesen können wir mittels eines Baumdiagrammes darstellen: