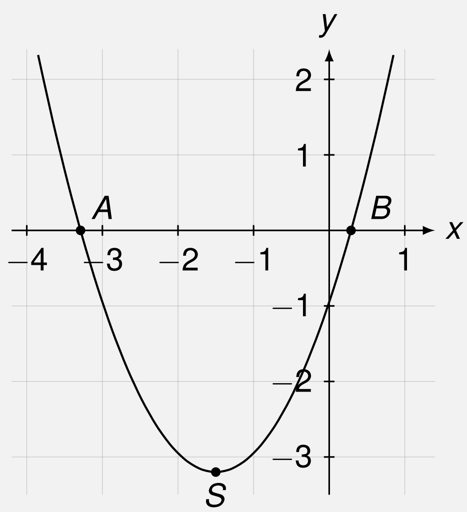
Inhalt

1 Quadratische Gleichungen

Motivation: Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, bei der mindestens ein Exponent von x zwei lautet. Es muss also ein x^2 vorkommen.

Wenn andere Exponenten als eins oder zwei in der Gleichungen stehen, handelt es sich um keine quadratische Gleichung mehr. Anstelle von x können wir natürlich auch eine andere Variable verwenden. In der unteren Abbildung ist eine quadratische Funktion abgebildet, wobei die Punkte A und B die Nullstellen angeben und der Punkt S den Scheitelpunkt angibt.



Mit quadratischen Gleichungen können wir eine Vielzahl von Problemen lösen, die auf den ersten Blick nicht unbedingt aus dem Alltag kommen. Mal angenommen, du willst einen Freund mit einem Schneeball aus weiter Distanz genau am Kopf treffen. Mit Hilfe der Physik und quadratischen Gleichungen lässt sich genau ausrechnen, wie du den Schneeball werfen musst.

A.1.1 Gib an, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um quadratische Gleichungen handelt.

	Gleichung	Quadratische Gleichung?
a)	$y = x^2 + 3x - 2$	○ ja ○ nein
b)	$f(x) = x^2 + 3x^3 - 2$	○ ja ○ nein
c)	$f(t) = at^2 - bt - 3$	○ ja ○ nein
d)	$f(t) = x^3 + 3t^2 - 2$	○ ja ○ nein
e)	$y = 3x - 2$	○ ja ○ nein
f)	$y = (3x - 2) \cdot (4x + 4)$	○ ja ○ nein

b) $0 = 2x^2 + 2x - 12$

Wir können $a = 2$, $b = 2$ und $c = -12$ ablesen, setzen die Werte in die abc-Formel ein und vereinfachen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-96)}}{4} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4} \end{aligned}$$

Damit folgt für $x_1 = \frac{-2+10}{4} = \frac{8}{4} = 2$ und für $x_2 = \frac{-2-10}{4} = -\frac{12}{4} = -3$.

A.1.3 Berechne die Nullstellen. Löse i) einmal mittels *pq*-Formel und einmal mit der *abc*-Formel:

a) $f(x) = -3x^2$

b) $f(x) = 5x^2$

c) $f(x) = 3x^2 - 6$

d) $f(x) = 4 - x^2$

e) $f(x) = -2x^2 + 3x$

f) $f(t) = -4t^2 - 2t$

g) $f(x) = x^2 + 5x - 2{,}75$

h) $f(u) = u^2 - 3u + \frac{5}{4}$

i) $f(x) = 3x^2 - 9x + 3{,}75$

1.4 Satz von Vieta

SATZ VON VIETA:

Liegt eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

vor, können wir anstelle der *pq*-Formel auch den Satz von Vieta benutzen. Es gilt:

Satz von Vieta

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ und } q = x_1 \cdot x_2$$

Beispiel 1.7 *Wir berechnen für 2 verschiedene Funktionen die Nullstellen.*

a) $0 = x^2 - 3x + 2$

Wir lesen im ersten Schritt $p = -3$ und $q = 2$ ab und suchen anschließend zwei Zahlen, die als Produkt 2 und als Summe 3 ergeben. Durch kurzes überlegen kommen wir auf $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Eine kurze Probe zeigt, dass wir die Zahlen richtig gewählt haben, denn

$$p = -3 = -(\underbrace{1}_{=x_1} + \underbrace{2}_{=x_2}) \checkmark \quad \textit{und} \quad q = 2 = \underbrace{1}_{=x_1} \cdot \underbrace{2}_{=x_2} \checkmark$$

sind erfüllt.

2.2 Lösen durch Rechnen

Natürlich können wir lineare Gleichungssysteme auch rechnerisch lösen. Wir schauen uns die verschiedenen Lösungserfahren anhand der beiden Gleichungen aus dem vorherigen Beispiel und einem weiteren Beispiel mit drei Unbekannten und drei Gleichungen an.

2.2.1 Einsetzungsverfahren

Die erste Möglichkeit, die wir uns anschauen, ist das Lösen von Gleichungssystemen durch Einsetzen. Hierbei stellen wir eine Gleichung nach einer Variablen um und setzen die Variable in die andere Gleichung ein.

Vorgehen - Einsetzungsverfahren:

1. Gleichung nach einer Variablen umformen.
2. Umgeformte Gleichung in andere Gleichung einsetzen und lösen.
3. Fehlenden Wert x mit Hilfe von Gleichung (1) oder (2) berechnen.
4. Lösung notieren und Probe machen.

EINSETZUNGS-VERFAHREN:

Beispiel 2.2 *Wir lösen das folgende LGS mit dem Einsetzungsverfahren:*

$$\begin{array}{rrcll} (1) & y & = & 3x - 2 & \\ (2) & y & = & x + 2 & \mid -2 \end{array}$$

Zunächst stellen wir Gleichung (2) *nach* x *um und setzen sie in* (1) *ein*

$$(2)\ x = y - 2 \xrightarrow{\text{in } (1)} y = 3 \cdot (y - 2) - 2$$

und berechnen y*:*

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & 3 \cdot (y - 2) - 2 & \\ \Leftrightarrow & y & = & 3y - 8 & \mid -3y \\ \Leftrightarrow & -2y & = & -8 & \mid :(-2) \\ \Leftrightarrow & y & = & 4 & \end{array}$$

Für den fehlenden x*-Wert setzen wir das Ergebnis* $y = 4$ *in Gleichung* (1) *oder* (2) *ein. Mit Gleichung* (2) *folgt:* $x = 4 - 2 = 2$.

3.5 Exponentielles Wachstum/Abnahme

Exponentielles Wachstum lässt sich ebenfalls mittels Potenzfunktionen darstellen, allerdings mit dem Unterschied das nun nicht mehr die Variable potenziert wird, sondern dass die Variable selbst der Exponent ist.

EXPONENTIAL-SCHREIBWEISE:

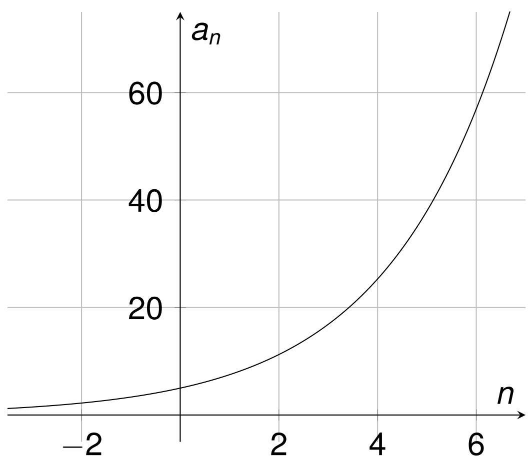
WACHSTUM UND ZERFALL:

Beispiel 3.2 *Petra hat sich eine* 5 cm *exotische Pflanze gekauft. Im Internet findet sie die Information, dass diese Pflanze pro Monat um das* 1,5*-fache ihrer Größe wächst. Nun möchte Petra eine Formel aufstellen, welche das Wachstum ihrer neuen Pflanze beschreibt, um dann die Größe ihrer Pflanze nach einem halben Jahr zu berechnen.*

1. *Die allgemeine Form lautet*

$$a_n = c \cdot a^n,$$

wobei a_n der Wert zum Zeitpunkt n ist. c ist der Startwert und a beschreibt den Wachstumsfaktor.



2. *Wir setzen unsere Informationen ($c = 5, a = 1{,}5$) in die allgemeine Form ein und erhalten:*

$$a_n = 5 \cdot 1{,}5^n \text{ [cm]}$$

3. *Die obenstehende Formel beschreibt also das Wachstum der Pflanze abhängig von der Monatszahl. Um die Größe der Pflanze nach einem halben Jahr zu bestimmen, setzen wir $n = 6$ für 6 Monate ein:*

$$a_6 = 5 \cdot 1{,}5^6 \approx 56{,}95 \text{ cm}$$

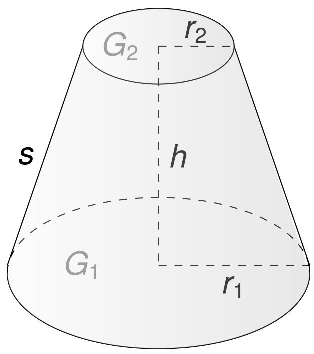
Petras Pflanze ist also nach einem halben Jahr etwa 56,95 cm *hoch.*

Beispiel 3.3 *In einem sehr heißen Sommer trocknet der Pool von Familie Dunst allmählich aus. Er nimmt dabei um* 3% *seiner Wassermenge pro Woche ab. Sohn*

Beispiel 6.2 *Gegeben ist der nebenstehende Kegelstumpf mit der Grundfläche G_1, der Schnittfläche G_2 und den Werten $r_1 = 7\,\mathrm{cm}, r_2 = 4\,\mathrm{cm}$ und $h = 5\,\mathrm{cm}$. Gesucht ist das Volumen des Stumpfes.*

Die allgemeine Formel lautet:

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$$



VOLUMEN EINES KEGELS:

Setzen wir die gegebenen Werte in die Formel ein, erhalten wir das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{5\mathrm{cm} \cdot \pi}{3} \cdot \left((7\mathrm{cm})^2 + 7\mathrm{cm} \cdot 4\mathrm{cm} + (4\mathrm{cm})^2\right) = 486{,}95\mathrm{cm}^3$$

A.6.3 Ein Kegelstumpf hat die Maße $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 4\,\mathrm{cm}$ und $h = 7\,\mathrm{cm}$. Berechne das Volumen des Körpers.

A.6.4 Ein Lampenschirm in Form eines Kegelstumpfes hat die Grundflächen $G_1 = 706{,}86\,\mathrm{cm}^2$ und $G_2 = 50{,}27\,\mathrm{cm}^2$. Die Seitenschräge s des Schirms beträgt 14 cm.

a) Berechne die Höhe h, welche den Abstand zwischen den beiden Grundflächen G_1 und G_2 wiedergibt.

b) Wie groß ist der Raum innerhalb des Lampenschirms?

6.3 Kugel berechnen

Eine Kugel ist ein geometrischer Körper, den wir erhalten, wenn wir einen Kreis um seinen Durchmesser rotieren lassen. Die Kugel hat einen Mittelpunkt M. Alle Punkte der Oberfläche sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Der Abstand dieser Punkte vom Mittelpunkt heißt Radius r.

Beispiel 6.3 *Gegeben ist die nebenstehende Kugel mit dem Radius $r = 7\,\mathrm{cm}$. Gesucht ist das Volumen der Kugel.*

e) $f(x) = -2x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} & -2x^2 + 3x &=&\ 0 && |x \text{ auskl.} \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (3 - 2x) &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & x_1 &=&\ 0 \\ \wedge\ & 3 - 2x &=&\ 0 && |-3 \\ \Leftrightarrow\ & -2x &=&\ -3 && |:(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x_2 &=&\ 1{,}5 \end{aligned}$$

f) $f(t) = -4t^2 - 2t$

$$\begin{aligned} & -4t^2 - 2t &=&\ 0 && |t \text{ auskl.} \\ \Leftrightarrow\ & t \cdot (-4t - 2) &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & t_1 &=&\ 0 \\ \wedge\ & -4t - 2 &=&\ 0 && |+2 \\ \Leftrightarrow\ & -4t &=&\ 2 && |:(-4) \\ \Leftrightarrow\ & t_2 &=&\ -0{,}5 \end{aligned}$$

g) $f(x) = x^2 + 5x - 2{,}75$

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x - 2{,}75 &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & x_{1,2} &=&\ -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} + 2{,}75} \\ \Leftrightarrow\ & x_1 &=&\ -5{,}5 \\ \wedge\ & x_2 &=&\ 0{,}5 \end{aligned}$$

h) $f(u) = u^2 - 3u + \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} & u^2 - 3u + \tfrac{5}{4} &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & u_{1,2} &=&\ \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow\ & u_1 &=&\ 0{,}5 \\ \wedge\ & u_2 &=&\ 2{,}5 \end{aligned}$$

i) $f(x) = 3x^2 - 9x + 3{,}75$

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 9x + 3{,}75 &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & x_{1,2} &=&\ \tfrac{9 \pm \sqrt{81-45}}{6} \\ \Leftrightarrow\ & x_1 &=&\ 0{,}5 \\ \wedge\ & x_2 &=&\ 2{,}5 \end{aligned}$$

zu A.1.4 Wir zerlegen die Funktion in ihre Linearfaktoren.

a) $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

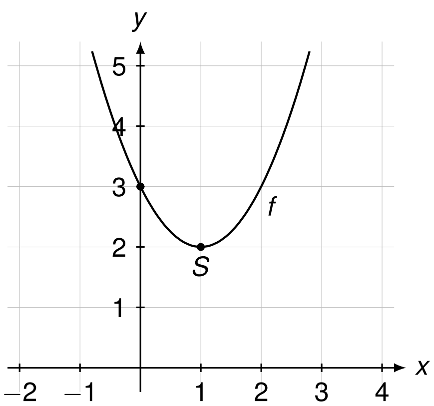
b) $f(x) = 2(x - 3) \cdot (x + 12)$

c) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 5)$

d) $f(x) = 3(x - 1) \cdot (x + 4)$

zu A.1.5

a) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
$y = f(0) = 3$, keine Nullstellen



b) $g(x) = -(x - 1{,}5)^2 - 1{,}75$
$y = f(0) = -4$, keine Nullstellen