Inhalt

2.3 Umkehrfunktion

Für eine Funktion $f(x)$ ist $f^{-1}(x)$ eine Umkehrfunktion, wenn für $y = f(x)$ gilt: $x = f^{-1}(y)$. Also wenn man in die Umkehrfunktion einen Funktionswert y der Ausgangsfunktion einsetzt, so erhält man den dazugehörigen x-Wert. Vorgehen:

1. Funktion als $y = f(x)$ umschreiben und nach x auflösen.
2. Variablentausch von x und y liefert $f^{-1}(x)$.

Umkehrfunktion

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn jeder Funktionswert y nur an einer einzigen Stelle $x \in D_f$ angenommen wird: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Eine solche Funktion f hat eine Umkehrfunktion f^{-1}, definiert durch $f^{-1}(y) = x$ für $y = f(x)$, also $f^{-1}(f(x)) = x$. In manchen Fällen muss man den Definitionsbereich einer Funktion einschränken, damit die so eingeschränkte Funktion umkehrbar ist.

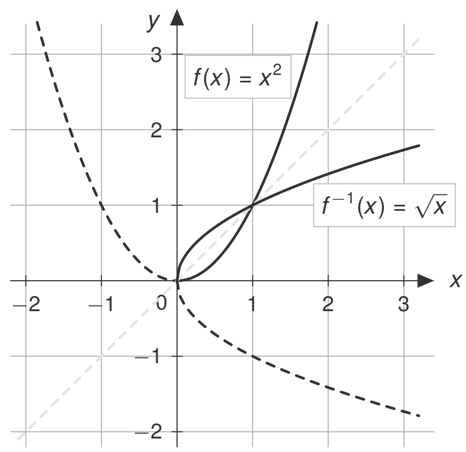
Beispiel: $f(x) = x^2$, definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, ist nicht umkehrbar, weil z.B. $(-3)^2 = 9 = 3^2$ und $-3 \neq 3$ ist. Ist $f(x) = x^2$ aber nur für $x \geq 0$ definiert, ist sie umkehrbar mit der Wurzelfunktion als Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

In manchen Fällen lässt sich die Gleichung für die Umkehrfunktion so bestimmen:

(i) Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen

(ii) Variablentausch



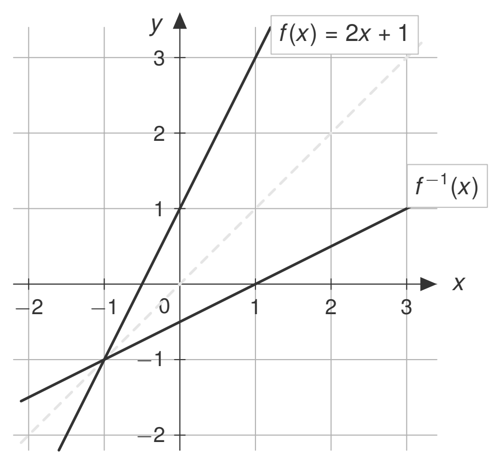
---

1. Lineare Funktion: Bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = 2x + 1$.

Wir arbeiten das obige Vorgehen ab und lösen die Gleichung nach x auf.

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & 2x + 1 & \mid -1 \\ \Leftrightarrow & y - 1 & = & 2x & \mid :2 \\ \Leftrightarrow & 0{,}5y - 0{,}5 & = & x & \end{array}$$

Das Tauschen der Variablen liefert die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = 0{,}5x - 0{,}5$.



Wir merken uns:
Der Definitionsbereich der Funktion ist der Wertebereich der Umkehrfunktion. Der Wertebereich der Funktion ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion. Das wird im nächsten Beispiel wichtig!

3 Gleichungen lösen

Zur Bestimmung von x gibt es einige Standardtechniken, die ihr beherrschen solltet.

1. <u>Einfaches Umformen:</u>

$$\begin{array}{rrcll} & 2x-8 & = & 0 & \mid +8 \\ \Leftrightarrow & 2x & = & 8 & \mid :2 \\ \Leftrightarrow & x & = & 4 & \end{array}$$

Einfaches Umformen

2. <u>Umformen mit Wurzel:</u>

$$\begin{array}{rrcll} & 2x^2-8 & = & 0 & \mid +8 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 & = & 8 & \mid :2 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 4 & \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & x_1 = 2 & \wedge & x_2 = -2 & \end{array}$$

Umformen mit Wurzel

> Merke: Die Gleichung $x^2 = a$ hat für
>
> - $a > 0$ die <u>beiden</u> Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$,
> - $a = 0$ die einzige Lösung $x = 0$,
> - $a < 0$ <u>keine</u> Lösung, denn es darf keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden! Die Lösungsmenge ist in diesem Fall leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

3. <u>Ausklammern:</u>

$$x^3 - \frac{1}{4}x^5 = 0 \quad \mid \text{größte gemeinsame } x \text{ ausklammern!}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{x^3}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}_{\text{Faktor}}}_{\text{Produkt}} = 0$$

Satz vom Nullprodukt:
Ein Produkt (Faktor MAL Faktor) ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Nach dem Ausklammern bestimmst du für den Teil in der Klammer und den Teil außerhalb der Klammer jeweils separat die Nullstellen.

$$x^3 = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{1}{4}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$$

Satz vom Nullprodukt

Hinweis: Dieser Lösungsweg ist nur dann sinnvoll, wenn keine Zahl ohne x vorkommt!

4.5 sin, cos und tan ableiten

Hier eine Übersicht über die Ableitungen der Sinus- und Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= \cos(x)\\ f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= -\sin(x)\\ f(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= -\cos(x)\\ f(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

sin, cos & tan ableiten

Die Ableitung des Tangens ist ein wenig schwieriger:

$$f(x) = \tan(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Der Tangens kann auch mit der Quotientenregel abgeleitet werden, wenn man weiß, dass der Tangens mit Sinus und Cosinus zu

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

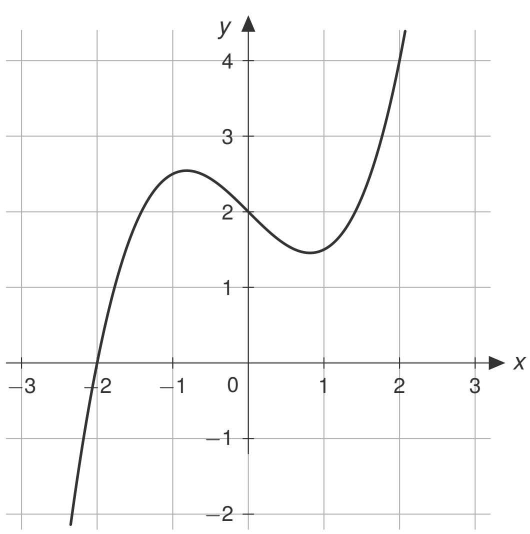
umgeschrieben werden kann. Dann folgt für die Ableitung

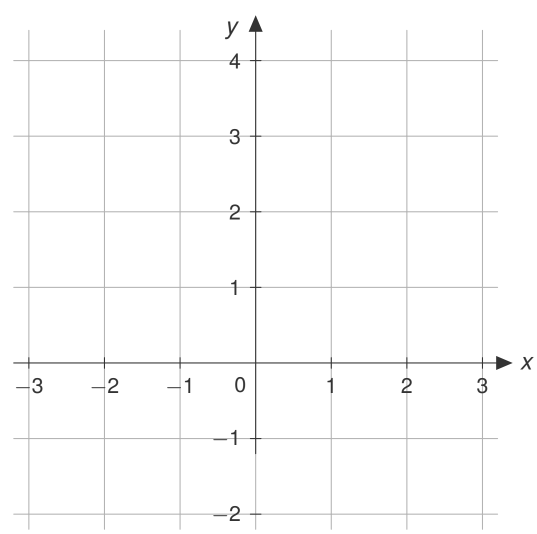
$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

mit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

4.6 Aufgaben

Aufgabe 19: Leite graphisch folgende Funktion ab.
Anmerkung: Die Funktion lautet $f(x) = 0{,}5x^3 - x + 2$.





Was ist ein LGS?

Jedes Verfahren kann zum Lösen von Gleichungssystemen genutzt werden. Jedoch ist das Additionsverfahren das Wichtigste, da für lineare Gleichungssysteme mit drei oder mehr Variablen systematische Lösungsverfahren genutzt werden sollten. Hier ist insbesondere das Gauß-Verfahren zu nennen, das auf dem Additionsverfahren beruht.

> Es werden **3 Fälle** für die Lösungen von Gleichungssystemen unterschieden:
>
> (i) eine **eindeutige Lösung**, wenn z.B. als Lösung $x_1 = 5, x_2 = 4$ herauskommt
>
> (ii) **keine Lösung**, wenn z.B. als Lösung $3 = 4$ eine falsche Aussage herauskommt.
>
> (iii) **unendlich viele Lösungen**, wenn z.B. als Lösung $0 = 0$ eine allgemeingültige Aussage herauskommt

7.1 Einsetzungsverfahren

> 1. Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen.
> 2. Diesen Term in die andere Gleichung einsetzen.
> 3. Auflösen der so entstandenen Gleichung nach der enthaltenen Variablen.
> 4. Einsetzen der Lösung in die Gleichung, die im 1. Schritt berechnet wurde, mit anschließender Berechnung der Variablen.

Einsetzungsverfahren

Beispiel für ein quadratisches Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{array}{rrcll} \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 & = & 12 & \\ \mathrm{II} & x_1 - x_2 & = & 1 & \mid + x_2 \end{array}$$

Gleichung II nach x_1 umformen: $x_1 = x_2 + 1$. Nun x_1 in Gleichung I einsetzen und nach der Unbekannten x_2 auflösen.

$$\begin{array}{lrll} & 2 \cdot \overbrace{(x_2 + 1)}^{=x_1} + 3x_2 & = 12 & \mid \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow & 5x_2 + 2 & = 12 & \mid - 2 \\ \Leftrightarrow & 5x_2 & = 10 & \mid : 5 \\ \Leftrightarrow & x_2 & = 2 & \end{array}$$

Die Lösung $x_2 = 2$ in die umgeformte Gleichung $x_1 = x_2 + 1$ aus dem ersten Schritt einsetzen und so die andere Variable berechnen. Es folgt $x_1 = x_2 + 1 = 2 + 1 = 3$.

7.2 Gleichsetzungsverfahren

> 1. Auflösen beider Gleichungen nach der gleichen Variablen.
> 2. Gleichsetzen der anderen Seiten der Gleichung.
> 3. Auflösen der so entstandenen Gleichung nach der enthaltenen Variablen.

9 Extremwertprobleme

Bei diesem Aufgabentyp (auch Optimierungsaufgaben genannt) geht es darum, Prozesse zu optimieren, minimalen oder maximalen Aufwand, Material oder Volumen zu erhalten. Wir suchen also eine Funktion, die unser Problem beschreibt und nur noch von einer Variablen abhängt. Wenn unsere Funktion von mehreren Variablen abhängt, müssen Variablen durch Nebenbedingungen so eliminiert werden, dass nur noch eine Variable vorliegt. Wenn z.B. nach maximalen Volumen gefragt wird, ist die Hauptbedingung $V = \ldots$. Soll nach minimaler Oberfläche gesucht werden ist die Hauptbedingung $O = \ldots$. Die Nebenbedingung enthält Informationen, wie zum Beispiel ein gegebenes Volumen, wenn die Oberfläche minimal bzw. maximal werden soll.

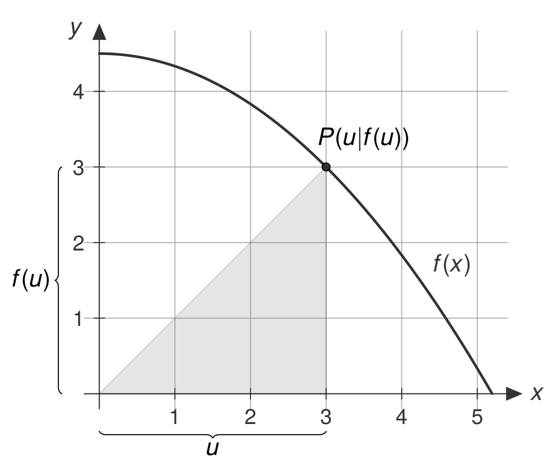
1. Hauptbedingung aufstellen: Was soll maximal/minimal werden?
2. Rand- bzw. Nebenbedingung aufstellen: Angabe im Text!
3. Nebenbedingung nach einer Variablen umstellen und in Hauptbedingung einsetzen $\Rightarrow$ Zielfunktion.
4. Zielfunktion auf Extremstellen untersuchen.
5. Alle fehlenden Werte bestimmen. (Randwerte beachten!)

In diesem Themengebiet kommen zwei Aufgabentypen recht häufig vor: *Körperaufgaben* und umgangssprachlich *Punkt auf Graph-Aufgaben*. Wir möchten an dieser Stelle zunächst auf den zweiten Aufgabentypen eingehen. Oft ist hier eine Funktion $f(x)$ vorgegeben, die sich in einem beliebigen Quadranten des Koordinatensystems befindet und in der sich ein Dreieck befindet, dessen Höhe und Breite abhängig von der Funktion f ist. Genau so ein Fall wird im folgenden Beispiel behandelt.

Punkt auf Graph

Beispiel Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 4{,}5$ im ersten Quadranten. Welche Koordinaten muss der Punkt P besitzen, damit der Flächeninhalt des grauen Dreiecks maximal ist? Unsere Hauptbedingung lautet:

$$\text{Flächeninhalt Dreieck:} \quad A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$



Die Nebenbedingung ist in diesem Fall, dass der Punkt P auf dem Funktionsgraphen liegen muss. Das ist eine nützliche Information, denn so können wir die Grundseite g und die Höhe h in der Formel durch die Koordinaten von P ersetzen.

12.3 Ortskurve

Als Ortskurve wird eine Kurve bezeichnet, auf der alle Punkte einer gegebenen Funktionsschar liegen, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. In einer Kurvendiskussion werden häufig die Ortskurven von Extrempunkten oder Wendepunkten der Graphen einer Funktionenschar gesucht.

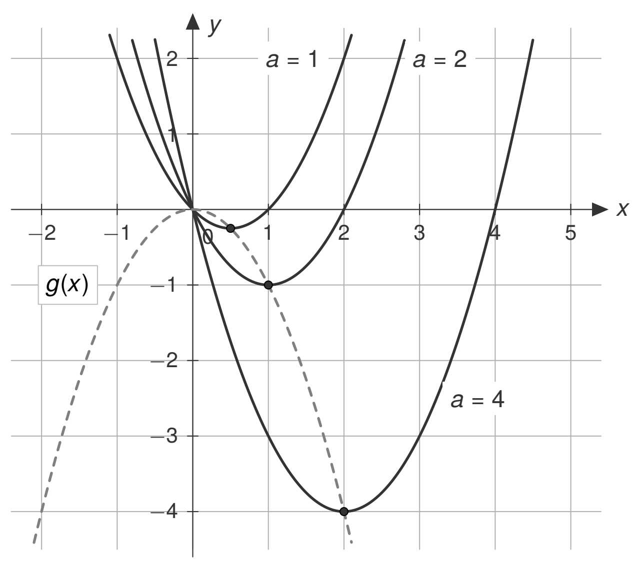
Zur Berechnung der Ortskurve werden zunächst die Koordinaten der betreffenden Punkte (z.B. aller Tiefpunkte einer Funktionenschar) in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter (z.B. a oder k) bestimmt. Vorgehen:

1. allgemeine Punkte $P(x|y)$ mit bestimmter Eigenschaft, z.B. Extrem- oder Wendepunkte, in Abhängigkeit vom Parameter bestimmen
2. x-Wert nach Parameter umstellen und in y-Wert einsetzen
3. y-Wert ist die Ortskurve

Ortskurve

Beispiel Gegeben sei die Funktionsschar $f_a(x) = x^2 - ax,\ a \in \mathbb{R}$.

Bestimme die Ortskurve, auf der alle Extrempunkte der Funktion liegen.



Als erstes bestimmen wir die Extrempunkte in Abhängigkeit von a:

$$f_a'(x) = 2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

Es handelt sich um einen Tiefpunkt, da $f_a''(x) = 2 > 0$ ist. Alle Tiefpunkte der Funktionsschar liegen bei $T(\frac{a}{2}| - \frac{a^2}{4})$. Um die Ortskurve zu erhalten, müssen wir die x-Koordinate des allgemeinen Tiefpunktes nach dem Parameter umstellen. Es folgt:

$$x = \frac{a}{2} \leftrightarrow a = 2x$$

$$T(x \mid g(x)) = T\left(\frac{a}{2} \,\middle|\, -\frac{a^2}{4}\right) = T\left(\frac{2x}{2} \,\middle|\, -\frac{(2x)^2}{4}\right) = T(x \mid \overbrace{-x^2}^{g(x)\,=})$$

Ortskurve

Damit lautet die Ortskurve $g(x) = -x^2$, die alle Tiefpunkte der Funktionenschar verbindet.

14 Aufgaben auf Prüfungsniveau

Ohne Hilfsmittel

Aufgabe 64: Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = 5x^2 \cdot e^{-2x+4}, x \in \mathbb{R}$$

Videolösung

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f.
[Zur Kontrolle: $f'(x) = 10x \cdot (1 - x) \cdot e^{-2x+4}$]

Im Folgenden kann die Funktion $f''(x) = 10 \cdot (2x^2 - 4x + 1) \cdot e^{-2x+4}$ benutzt werden.

b) Weisen Sie nach, dass ein lokaler Hochpunkt existiert und bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes.

Aufgabe 65: Gegeben ist die folgende Funktion f durch die Gleichung

$$f(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

Videolösung

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden Abbildung dargestellt.