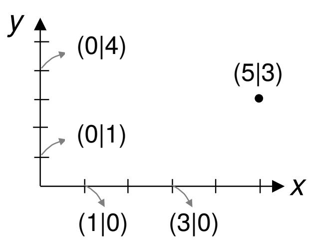
Inhalt

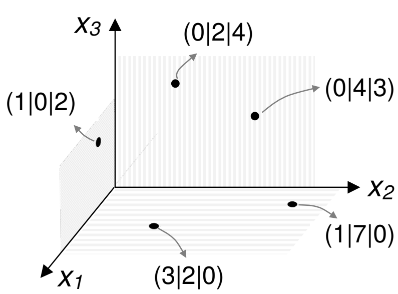
1 Grundlagen

1.1 Punkte im Koordinatensystem ablesen

Zu einem beliebigen Punkt im dreidimensionalen Raum $(x_1|x_2|x_3)$ bzw. $(x|y|z)$, z.B. $P(6|7|4)$, gelangt man, indem man vom Nullpunkt des Koordinatensystems 6 Einheiten in x-Richtung, 7 Einheiten in y-Richtung und dann 4 Einheiten in z-Richtung geht. Hier noch besondere Punkte:

Punkte ablesen





2-Dimensional:

- Alle Punkte auf der y-Achse haben den x-Wert 0! $P(0|y)$
- Alle Punkte auf der x-Achse haben den y-Wert 0! $P(x|0)$

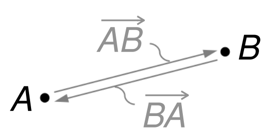
3-Dimensional:

- Alle Punkte in der x_1x_2-Ebene haben den x_3-Wert 0! $P(x_1|x_2|0)$
- Alle Punkte in der x_1x_3-Ebene haben den x_2-Wert 0! $P(x_1|0|x_3)$
- Alle Punkte in der x_2x_3-Ebene haben den x_1-Wert 0! $P(0|x_2|x_3)$

1.2 Vom Punkt zum Vektor

Ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet eine Verschiebung in der Ebene oder im Raum. Aus zwei Punkten im dreidimensionalen Raum $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man den Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Grafisch wird der Vektor durch einen Pfeil dargestellt, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung und ist genauso lang wie $\overrightarrow{AB}$.

1.9 Aufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{b} - \vec{d}$

c) $3\vec{d} + 2\vec{e}$

d) $\vec{a} + 0{,}5\vec{c} - 4\vec{e}$

e) $\vec{b} \bullet \vec{c}$

f) $\vec{a} \bullet \vec{d}$

g) $(\vec{b} \bullet \vec{d}) \cdot \vec{e}$

h) $\vec{b} \times \vec{c}$

i) $\vec{d} \times \vec{e}$

j) $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$

k) $|\vec{a}|$

l) $|\vec{c} + \vec{d}|$

Aufgabe 2: Gegeben sind die Punkte

$$P(3|1|-3),\ Q(2|-1|0) \text{ und } R(-5|0|-3).$$

Berechne die Mittelpunkte zwischen den Punkten und den Schwerpunkt des Dreiecks PQR.

Aufgabe 3: Prüfe folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Gegeben sind die Punkte

$$A(1|3|-1),\ B(3|1|1) \text{ und } C(4|4|0).$$

a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks.

c) Bestimme einen Punkt D so, dass die Punkte $ABCD$ eine Raute bilden.

Aufgabe 5: Eine Pyramide hat die unteren Eckpunkte

$$A(0|0|0),\ B(0|4|0),\ C(4|4|0) \text{ und } D(4|0|0).$$

a) Bestimme die Koordinaten der Spitze S so, dass die Pyramide eine gleichseitige Pyramide mit einem Volumen von 16 [VE] ist.

b) Bestimme die Größe der Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 6: Koordinatenebenen.

a) Gib zwei Punkte an, die in der x_1x_2-Ebene liegen.

b) In welcher Koordinatenebene liegen die Punkte $A(3|0|2)$, $B(0|1|-1)$ und $C(0|0|2)$?

c) Beschreibe mit Worten, welche Punkte sowohl in der x_2x_3-Ebene, als auch in der x_1x_3-Ebene liegen und gib eine allgemeine Form für den Punkt an.

Aufgabe 7: Wissenstest.

	Aussage	**Richtig**	**Falsch**
a)	Liegt ein Punkt in einer der Koordinatenebenen, muss mindestens eine Komponente 0 sein.		
b)	Wenn man zwei Vektoren im Kreuzprodukt miteinander multipliziert, kommt nur eine Zahl raus.		
c)	Die Länge eines Vektors entspricht der Wurzel des Skalarprodukts mit sich selbst.		
d)	Zwei parallele Vektoren sind linear unabhängig.		

5.3 Abstand paralleler Geraden

Der Abstand ist die kürzeste Strecke zwischen zwei Geraden. Bei zwei parallelen Geraden g_1 und g_2 ist es der Abstand eines beliebigen Punktes $P \in g_2$ von der Geraden g_1.

Gerade - Gerade (parallel)

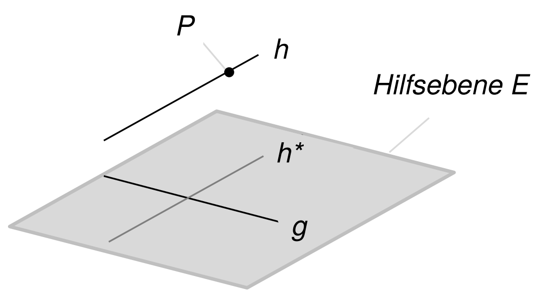
1. Ortsvektor der Geraden g_2 wird als Punkt P festgelegt.
2. Weiter mit dem Vorgehen *Abstand Punkt zu Gerade*.

5.4 Abstand windschiefer Geraden

Bei der Berechnung des Abstands zweier windschiefer Geraden werden wir in diesem Abschnitt zwei Verfahren kennenlernen. Zum einen die Verwendung einer Hilfsebene und zum anderen die Verwendung von Lotfußpunkten.

Berechnung mit Hilfsebene

Wir betrachten die beiden windschiefen Geraden g und h. Zur Berechnung des Abstands führen wir eine Hilfsebene E ein, wodurch wir später nur noch den Abstand eines Punktes $P \in h$ von der Ebene berechnen müssen.



1. Normalenvektor $\vec{n}$ mit Richtungsvektoren der Geraden g und h bestimmen.
2. Koordinatenform von E aufstellen, z.B. mit Punkt von g und $\vec{n}$.
3. Abstand des Punktes (Ortsvektor nehmen!) von Gerade h zur Hilfsebene E bestimmen.

Beispiel Berechne den Abstand d der beiden windschiefen Geraden

Gerade - Gerade (Hilfsebene)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst berechnen wir den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

A Lösungen

A.1 zu Grundlagen

zu Aufgabe 1:

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $3 \cdot \vec{d} + 2 \cdot \vec{e} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c} - 4 \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{b} \bullet \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 8$

f) $\vec{a} \bullet \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 0$

g) $(\vec{b} \bullet \vec{d}) \cdot \vec{e} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 & - & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 & - & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & - & (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

i) $\vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & - & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & - & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & - & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$