

# Inhalt

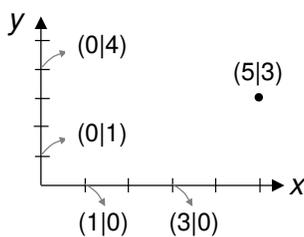
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b> .....	<b>5</b>
1.1	Punkte im Koordinatensystem ablesen .....	5
1.2	Vom Punkt zum Vektor .....	5
1.3	Unterschied Ortsvektor/Richtungsvektor .....	6
1.4	Länge eines Vektors .....	6
1.5	Rechnen mit Vektoren .....	7
1.6	Mittelpunkt einer Strecke .....	9
1.7	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit .....	10
1.8	Koordinatenebenen .....	12
1.9	Aufgaben .....	13
<b>2</b>	<b>Geraden</b> .....	<b>15</b>
2.1	Punktprobe Gerade .....	15
2.2	Spurpunkte von Gerade mit Koordinatenebenen .....	16
2.3	Geschwindigkeitsaufgaben .....	17
2.4	Aufgaben .....	18
<b>3</b>	<b>Ebenen</b> .....	<b>21</b>
3.1	Parameterdarstellung einer Ebene .....	21
3.2	Ebenengleichung aufstellen .....	21
3.3	Normalenvektor einer Ebene .....	22
3.4	Umwandeln von Ebenengleichungen .....	24
3.5	Punktprobe Ebene .....	29
3.6	Spurpunkte mit Koordinatenachsen .....	29
3.7	Aufgaben .....	31
<b>4</b>	<b>Lagebeziehungen</b> .....	<b>33</b>
4.1	Lage Gerade - Gerade .....	34
4.2	Lage Gerade - Ebene .....	35
4.3	Lage Ebene - Ebene .....	37
4.4	Übersicht Schnittwinkel .....	40
4.5	Aufgaben .....	41

<b>5</b>	<b>Abstände</b> .....	<b>47</b>
5.1	Abstand Punkt zu Punkt .....	47
5.2	Abstand Punkt zu Gerade .....	47
5.3	Abstand paralleler Geraden .....	49
5.4	Abstand windschiefer Geraden .....	49
5.5	Abstand Punkt zu Ebene .....	51
5.6	Aufgaben .....	52
<b>6</b>	<b>Kreise und Kugeln</b> .....	<b>55</b>
6.1	Der Kreis .....	55
6.2	Die Kugel .....	56
6.3	Lagebeziehungen und Abstände .....	56
6.4	Aufgaben .....	63
<b>7</b>	<b>Matrizen</b> .....	<b>65</b>
7.1	Aufbau einer Matrix .....	65
7.2	Rechnen mit Matrizen .....	65
7.3	Vom LGS zur Matrix .....	68
7.4	Aufgaben .....	68
<b>8</b>	<b>Austauschprozesse</b> .....	<b>69</b>
8.1	Übergangsgraph/-diagramm .....	69
8.2	Übergangsmatrix ablesen .....	69
8.3	Zeitlich Vorwärtsrechnen .....	70
8.4	Zeitlich Rückwärtsrechnen (mit LGS oder Inverse) .....	71
8.5	Begriff Fixvektor, stabiler Vektor .....	73
8.6	Aufgaben .....	74
<b>9</b>	<b>Aufgaben auf Prüfungsniveau</b> .....	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Lösungen</b> .....	<b>77</b>
A.1	zu Grundlagen .....	77
A.2	zu Geraden .....	81
A.3	zu Ebenen .....	84
A.4	zu Lagebeziehungen .....	87
A.5	zu Abstände .....	97
A.6	zu Kreise und Kugeln .....	102
A.7	zu Matrizen .....	105
A.8	zu Austauschprozesse .....	105
A.9	zu Aufgaben auf Prüfungsniveau .....	107

# 1 Grundlagen

## 1.1 Punkte im Koordinatensystem ablesen

Zu einem beliebigen Punkt im dreidimensionalen Raum  $(x_1|x_2|x_3)$  bzw.  $(x|y|z)$ , z.B.  $P(6|7|4)$ , gelangt man, indem man vom Nullpunkt des Koordinatensystems 6 Einheiten in  $x$ -Richtung, 7 Einheiten in  $y$ -Richtung und dann 4 Einheiten in  $z$ -Richtung geht. Hier noch besondere Punkte:

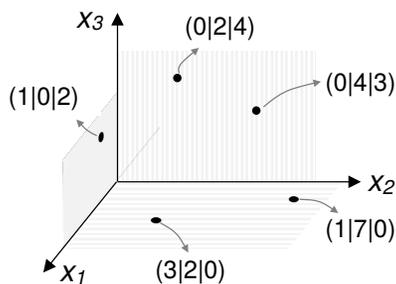


### 2-Dimensional:

- Alle Punkte auf der  $y$ -Achse haben den  $x$ -Wert 0!  $P(0|y)$
- Alle Punkte auf der  $x$ -Achse haben den  $y$ -Wert 0!  $P(x|0)$

### 3-Dimensional:

- Alle Punkte in der  $x_1x_2$ -Ebene haben den  $x_3$ -Wert 0!  $P(x_1|x_2|0)$
- Alle Punkte in der  $x_1x_3$ -Ebene haben den  $x_2$ -Wert 0!  $P(x_1|0|x_3)$
- Alle Punkte in der  $x_2x_3$ -Ebene haben den  $x_1$ -Wert 0!  $P(0|x_2|x_3)$

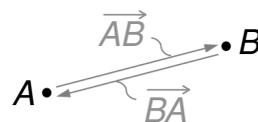


Punkte ablesen

## 1.2 Vom Punkt zum Vektor

Ein Vektor  $\vec{AB}$  bezeichnet eine Verschiebung in der Ebene oder im Raum. Aus zwei Punkten im dreidimensionalen Raum  $A(a_1|a_2|a_3)$  und  $B(b_1|b_2|b_3)$  erhält man den Vektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Grafisch wird der Vektor durch einen Pfeil dargestellt, der vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  zeigt. Der Vektor  $\vec{BA}$  zeigt in die entgegengesetzte Richtung und ist genauso lang wie  $\vec{AB}$ .

## 1.9 Aufgaben

**Aufgabe 1:** Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne:

- |                                      |  |   |
|--------------------------------------|--|---|
| a) $\vec{a} + \vec{b}$               | e) $\vec{b} \cdot \vec{c}$                 | i) $\vec{d} \times \vec{e}$                 |
| b) $\vec{b} - \vec{d}$               | f) $\vec{a} \cdot \vec{d}$                 | j) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ |
| c) $3\vec{d} + 2\vec{e}$             | g) $(\vec{b} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e}$ | k) $ \vec{a} $                              |
| d) $\vec{a} + 0,5\vec{c} - 4\vec{e}$ | h) $\vec{b} \times \vec{c}$                | l) $ \vec{c} + \vec{d} $                    |

**Aufgabe 2:** Gegeben sind die Punkte

$$P(3|1|-3), Q(2|-1|0) \text{ und } R(-5|0|-3).$$

Berechne die Mittelpunkte zwischen den Punkten und den Schwerpunkt des Dreiecks  $PQR$ .

**Aufgabe 3:** Prüfe folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  | c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$  | e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ | d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ |  |

**Aufgabe 4:** Gegeben sind die Punkte

$$A(1|3|-1), B(3|1|1) \text{ und } C(4|4|0).$$

- Zeige, dass das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig ist.
- Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks.
- Bestimme einen Punkt  $D$  so, dass die Punkte  $ABCD$  eine Raute bilden.

**Aufgabe 5:** Eine Pyramide hat die unteren Eckpunkte

$$A(0|0|0), B(0|4|0), C(4|4|0) \text{ und } D(4|0|0).$$

- Bestimme die Koordinaten der Spitze  $S$  so, dass die Pyramide eine gleichseitige Pyramide mit einem Volumen von 16 [VE] ist.
- Bestimme die Größe der Oberfläche der Pyramide.

**Aufgabe 6:** Koordinatenebenen.

- Gib zwei Punkte an, die in der  $x_1x_2$ -Ebene liegen.
- In welcher Koordinatenebene liegen die Punkte  $A(3|0|2)$ ,  $B(0|1|-1)$  und  $C(0|0|2)$ ?
- Beschreibe mit Worten, welche Punkte sowohl in der  $x_2x_3$ -Ebene, als auch in der  $x_1x_3$ -Ebene liegen und gib eine allgemeine Form für den Punkt an.

**Aufgabe 7:** Wissenstest.

Aussage	Richtig	Falsch
a) Liegt ein Punkt in einer der Koordinatenebenen, muss mindestens eine Komponente 0 sein.		
b) Wenn man zwei Vektoren im Kreuzprodukt miteinander multipliziert, kommt nur eine Zahl raus.		
c) Die Länge eines Vektors entspricht der Wurzel des Skalarprodukts mit sich selbst.		
d) Zwei parallele Vektoren sind linear unabhängig.		

## 5.3 Abstand paralleler Geraden

Der Abstand ist die kürzeste Strecke zwischen zwei Geraden. Bei zwei parallelen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  ist es der Abstand eines beliebigen Punktes  $P \in g_2$  von der Geraden  $g_1$ .

1. Ortsvektor der Geraden  $g_2$  wird als Punkt  $P$  festgelegt.
2. Weiter mit dem Vorgehen *Abstand Punkt zu Gerade*.



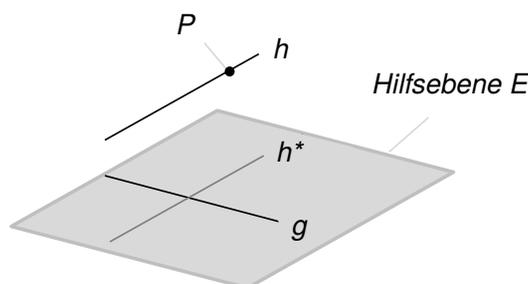
Gerade -  
Gerade  
(parallel)

## 5.4 Abstand windschiefer Geraden

Bei der Berechnung des Abstands zweier windschiefer Geraden werden wir in diesem Abschnitt zwei Verfahren kennenlernen. Zum einen die Verwendung einer Hilfsebene und zum anderen die Verwendung von Lotfußpunkten.

### *Berechnung mit Hilfsebene*

Wir betrachten die beiden windschiefen Geraden  $g$  und  $h$ . Zur Berechnung des Abstands führen wir eine Hilfsebene  $E$  ein, wodurch wir später nur noch den Abstand eines Punktes  $P \in h$  von der Ebene berechnen müssen.



1. Normalenvektor  $\vec{n}$  mit Richtungsvektoren der Geraden  $g$  und  $h$  bestimmen.
2. Koordinatenform von  $E$  aufstellen, z.B. mit Punkt von  $g$  und  $\vec{n}$ .
3. Abstand des Punktes (Ortsvektor nehmen!) von Gerade  $h$  zur Hilfsebene  $E$  bestimmen.

**Beispiel** Berechne den Abstand  $d$  der beiden windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst berechnen wir den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 2 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$



Gerade -  
Gerade  
(Hilfsebene)

# A Lösungen

## A.1 zu Grundlagen

zu Aufgabe 1:

$$\text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 3 \cdot \vec{d} + 2 \cdot \vec{e} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c} - 4 \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 8$$

$$\text{f) } \vec{a} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 0$$

$$\text{g) } (\vec{b} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } \vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$