Inhalt

Vorwort

Endlich ist es so weit: Unser Mathe ABI Lernheft ist fertig. Seit 2020 helfen wir jetzt schon tagtäglich vielen Schülerinnen und Schülern mit unseren Lernvideos in Mathe. Wir wollen zeigen, dass jede Schülerin und jeder Schüler Mathe verstehen und eine gute Abiturprüfung schreiben kann. Deshalb freuen wir uns riesig, dir mit diesem Lernheft eine weitere Unterstützung an die Hand geben zu können.

In diesem Heft hast du sowohl die Möglichkeit mit den schriftlichen Erklärungen zu lernen als auch mit unseren Lernvideos. Dazu findest du QR-Codes, die du einscannen kannst und die dich dann direkt zu unseren Videos führen. So kannst du deinen Lernprozess perfekt an deinen Lerntypen anpassen. Es gibt zum einen Lernvideos, wo wir das Thema für dich erklären und zum anderen, wo wir das Thema an einem oder mehreren Beispielen üben.

Damit das Heft nicht aus allen Nähten platzt und weil wir die Lösungen so ausführlich wie möglich beschreiben wollten, haben wir die Lösungen für dich digital ausgelagert. Diese findest du unter dem folgenden QR-Code, aber auch bei jedem Aufgabenkapitel.

Lösungen:

An dieser Stelle möchten wir uns bei einigen Personen bedanken:

Zum einen möchten wir unseren Eltern von ganzem Herzen Danke sagen! Ohne euch würden wir heute nicht hier stehen! Ihr habt immer an unser Projekt geglaubt und uns mit aller Kraft unterstützt – auch als die Erfolge anfangs ausblieben. Damit habt ihr uns immer wieder Kraft und Selbstvertrauen geschenkt!

Zudem möchten wir uns bei unseren Geschwistern und vielen unserer Freunde bedanken! Ihr habt immer mit uns mitgefiebert und uns ohne jede Gegenleistung unterstützt. Wir sind froh euch zu haben!

Und jetzt wünschen wir dir viel Spaß mit unserem Abiheft und ganz viel Erfolg bei den Prüfungen! Du schaffst das!

Johannes

Josef

Checkliste

Trage hinter jedem Thema ein, wie sicher du dich fühlst. 1 bedeutet, dass du das Thema noch nicht beherrschst und 5 bedeutet, dass du das Thema bereits sehr gut beherrschst.

Analysis	1	2	3	4	5
Ableitungen					
Tangenten					
Steigungs- und Schnittwinkel					
Symmetrie, Schnittpunkte, Monotonie					
Extrempunkte					
Wendepunkte					
e-Funktionen und ln					
Lineare Gleichungssysteme					
Steckbriefaufgaben					
Extremwertprobleme					
Exponentielle Wachstumsprozesse					
Integralrechnung und Rotationskörper					
Funktions-/ Kurvenscharen					
Lineare Algebra	1	2	3	4	5
Geraden im Raum					
Orthogonalität und Skalarprodukt					
Winkel					
Ebenen im Raum					
Ebenen – Spurpunkte und Formumwandlung					
Ebenen – Lagebeziehungen					
Abstände im Raum					
Stochastik	1	2	3	4	5
Zufallsexperimente					
Baumdiagramme					
Kombinatorik					
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit					
Zufallsvariablen und Verteilung					
Bernoulli- und Binomalverteilung					
Hypergeometrische Verteilung					
Spezielle stetige Verteilungen					
Sigma-Regeln					
Hypothesentest					
Stochastische Matrizen					

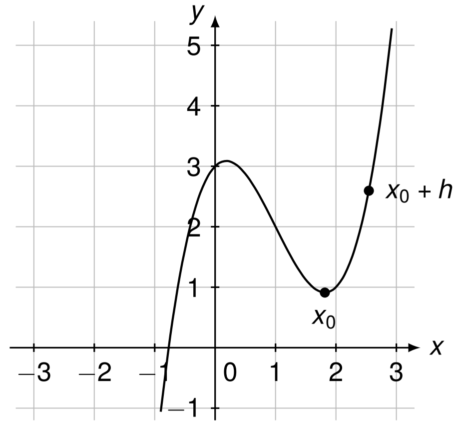
1.2 Von mittlerer Änderungsrate zu lokaler Änderungsrate

- Lokale Änderungsrate = Steigung in einem konkreten Punkt x_0.

Vorgehen zur Bestimmung der lokalen Änderungsrate:

1. Zweiten Punkt wählen, der etwas weiter rechts liegt als x_0 ($\rightarrow x_0 + h$).

EINSTIEG:



2. Durchschnittliche Steigung zwischen x_0 und $x_0 + h$ berechnen:

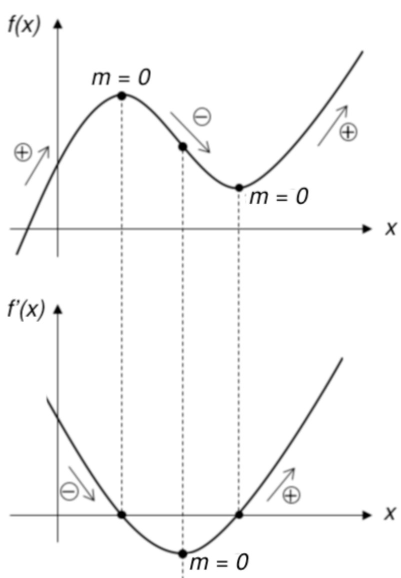
$$m = \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{(x_0 + h) - (x_0)} = \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}$$

3. Das h gegen 0 laufen lassen, sodass der Abstand immer kleiner wird und die Punkte irgendwann quasi aufeinander liegen:

$$f'\,(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h} \right)$$

4. Die durchschnittliche Steigung zwischen den Punkten entspricht dann der Steigung im Punkt x_0, da die beiden Punkte so nah beieinander liegen.

5. Der ***y*-Wert** der Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion $f(x)$ an jeder bel. Stelle an.



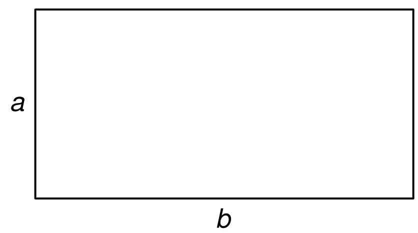
Dort, wo der Graph der Ableitung $f'(x)$...

- unter der x-Achse verläuft, fällt der Funktionsgraph von $f(x)$.
- über der x-Achse verläuft, steigt der Funktionsgraph von $f(x)$.
- Nullstellen hat, hat der Funktionsgraph von $f(x)$ Extremstellen.
- Extremstellen hat, hat der Funktionsgraph von $f(x)$ Wendestellen. $f(x)$ fällt/steigt an diesen Stellen am stärksten.

Beispiel 10.1. Lucas hat sich bei einem Bauern für 100.000€ folgenden Deal gesichert:

Er darf mit 200 Metern Zaunmaterial ein rechteckiges Grundstück auf einem Acker einzäunen. Wie sollte er die Maße des Rechtecks wählen, um eine möglichst große Fläche zu bekommen? Wie groß ist die Fläche dann?

1. Skizze anfertigen.



200 Meter Zaunmaterial

2. Hauptbedingung aufstellen.

   Im Beispiel soll der Flächeninhalt eines Rechtecks maximiert werden.

$$\text{Hauptbedingung:} \quad A = a \cdot b$$

3. Nebenbedingungen formulieren & Zielfunktion bestimmen.

   Der Flächeninhalt des Grundstücks wird durch die Zaunlänge von 200 Metern eingeschränkt. Der Umfang des Rechtecks ist also auf 200 Meter beschränkt $\rightarrow$ das ist unsere Nebenbedingung:

$$\text{Nebenbedingung:} \quad 2a + 2b = 200 \text{ [m]}$$

   Wir stellen diese Formel nun nach einer der beiden Variablen um, damit wir sie in die Hauptbedingung einsetzen können und diese dann nur noch von einer Variablen abhängt:

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 200 && \mid -2a \\ \Leftrightarrow \quad 2b &= 200 - 2a && \mid \div 2 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 100 - a \end{aligned}$$

   Lösung in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ziefunktion:} \quad A(a) &= a \cdot \overbrace{(100 - a)}^{=b} \\ &= -a^2 + 100a \end{aligned}$$

4. Maximum / Minimum berechnen.

   (i) Die erste und zweite Ableitung von $A(a)$ berechnen:

$$A'(a) = -2a + 100 \qquad \text{und} \qquad A''(a) = -2$$

   (ii) Notwendige Bedingung: $A'(a) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -2a + 100 &= 0 && \mid -100 \\ \Leftrightarrow \quad -2a &= -100 && \mid : (-2) \\ \Leftrightarrow \quad a &= 50 \end{aligned}$$

(iii) Hinreichende Bedingung: $A'(a) = 0 \wedge A''(a) \neq 0$

$$A''(50) \quad = \quad -2 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

(iv) y-Wert des Extrempunktes berechnen:

$$A(50) = -(50)^2 + 100 \cdot (50) = 2.500 \;\Rightarrow\; \text{HP } (50 \mid 2.500)$$

Der Flächeninhalt des Grundstücks ist also maximal, wenn die Seite a eine Länge von 50 Metern hat. Er beträgt dann 2.500 m^2.

Nun müssen wir noch berechnen, wie groß die Seite b ist. Dazu setzen wir einfach unser Ergebnis in die Nebenbedingung ein:

$$\Rightarrow b = 100 - (50) = 50$$

Die Seite b ist also ebenfalls 50 Meter lang, wenn der Flächeninhalt maximal sein soll.

5. Ränder überprüfen.

   a muss mindestens 0 sein und kann maximal 100 werden.

   > **Tipp**: Solltest du dir unsicher sein, wie die Randwerte lauten, setze einfach die Nebenbedingung gleich Null.

   Wir prüfen also: $A(0) = 0 < 2500$ und $A(100) = 0 < 2500$ ✓

   Der Rand ist in unserem Beispiel also nicht wichtig.

EXTREMWERTPROBLEME:

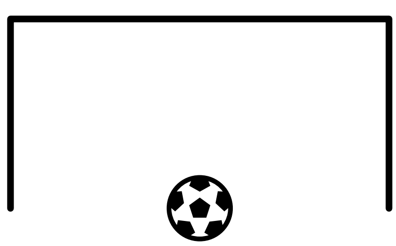
BEISPIELE:

10.2 Aufgaben

Aufgabe 34: Zwei Eltern möchten für ihr Kind ein Fußballtor bauen. Dazu haben sie eine sechs Meter lange Eisenstange gekauft.

Welche Maße muss das Tor besitzen, um eine möglichst große „Torfläche“ zu haben?

Lösungen



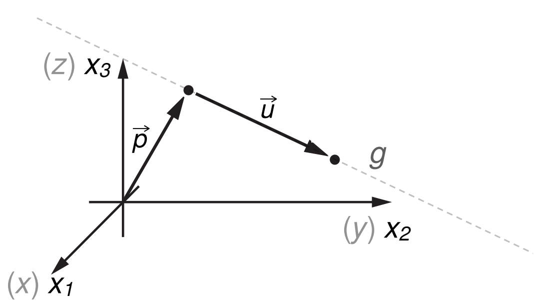
14 Geraden im Raum

14.1 Geraden in Parameterform

> **Allgemeine Geradengleichung**:
>
> $$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- $\vec{p}$ = Stützvektor / Aufpunkt
  - → Startet im Ursprung, d.h. im Punkt $(0 \mid 0 \mid 0)$.
  - → Koordinaten des Stützvektors geben gleichzeitig Punkt auf der Geraden an.
- $\vec{u}$ = Richtungsvektor
  - → Gibt Richtung der Geraden im Raum an.
- t = Parameter
  - → Durch Einsetzen aller möglichen Werte, erreicht man jeden Punkt auf der Geraden.

Geometrisch kann man sich das so vorstellen:



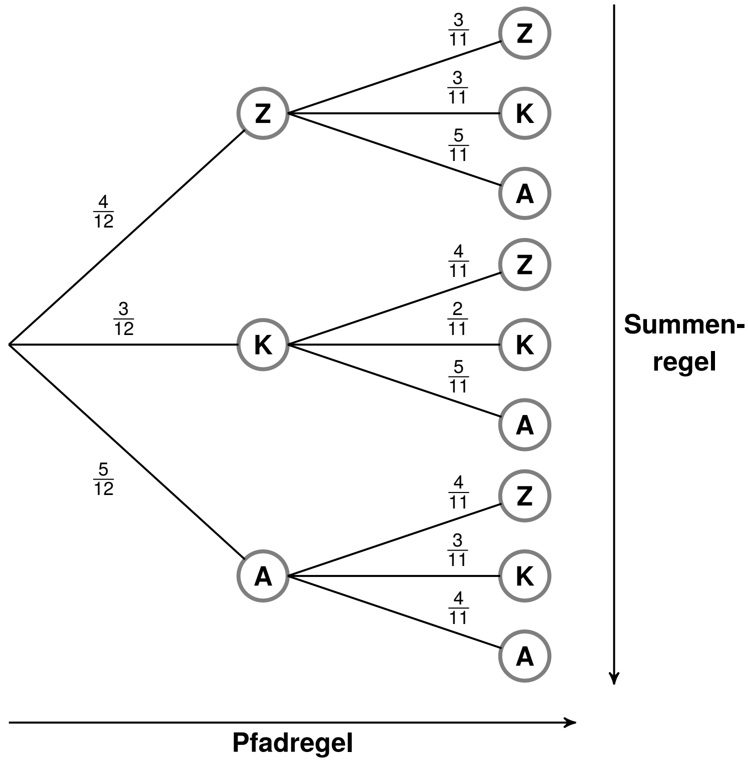
Gerade in Parameterform:

- Der Stützvektor $\vec{p}$ stützt die Gerade und stellt die Verbindung zum Ursprung her.
  - → Außerdem sind die Koordinaten des Stützvektors auch die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden.
- Durch die Multiplikation des Richtungsvektors mit allen reellen Zahlen entsteht eine Gerade.
  - → Die Gerade ist unendlich lang.
- Das Koordinatensystem bekommt in 3D eine Achse dazu: $(x \mid y \mid \boldsymbol{z})$ oder $(x_1 \mid x_2 \mid \boldsymbol{x_3})$.

Das Baumdiagramm sieht wie folgt aus:

Baumdiagramme:

Beispiele:



22.2 Pfad- & Summenregel

Pfadregel:

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad = Produkt aller Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad

- Sucht man die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis, das am Ende eines Pfades steht, so multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
- Am besten schreibt man die Pfadwahrscheinlichkeit hinter den entsprechenden Pfad.

Summenregel:

Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis = Summe aller Pfade, die zum Ereignis gehören

- Sucht man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, das sich aus mehreren Ergebnissen zusammensetzt, so addiert man alle Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis gehören.

3. Überprüfen, ob Ergebnisse aus der konkreten Beobachtung im Annahme- oder Ablehnungsbereich liegen und dann Nullhypothese annehmen/ablehnen.

   In unserem Beispiel werden nun 65 Köpfe geworfen.

   Dieser Wert liegt im Ablehnungsbereich, weshalb wir davon ausgehen, dass H_0 falsch ist und es sich damit nicht um eine faire Münze handelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir damit falsch liegen, liegt bei maximal 5% (Signifikanzniveau).

30.2 Einseitiger Hypothesentest

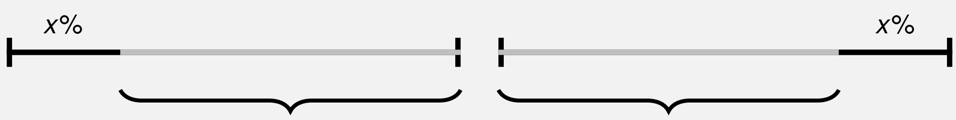
- Man möchte zeigen, dass etwas **größer** oder **kleiner** als eine Wahrscheinlichkeit p_0 ist.
- Signifikanzniveau soll bei $x\%$ liegen.

Vorgehen: Einseitiger Hypothesentest

1. **Null- und Alternativhypothese aufstellen**

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
$H_0 : p \geq p_0$	$H_0 : p \leq p_0$
$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$

2. **Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen**
   - Ablehnungsbereich = Bereich, in dem man zu höchstens $x\%$, landet, wenn H_0 stimmt.
   - Mit p_0 und Anzahl der Durchführungen den Bereich links/rechts berechnen, in dem man zu höchstens $x\%$ landet.



3. **Überprüfen**, ob Ergebnisse aus der konkreten Beobachtung **im Annahme- oder Ablehnungsbereich liegen** und dann Nullhypothese annehmen/ablehnen.

EINSEITIGER TEST:

BEISPIELE:

31.3 Austauschprozesse und Übergangsmatrizen

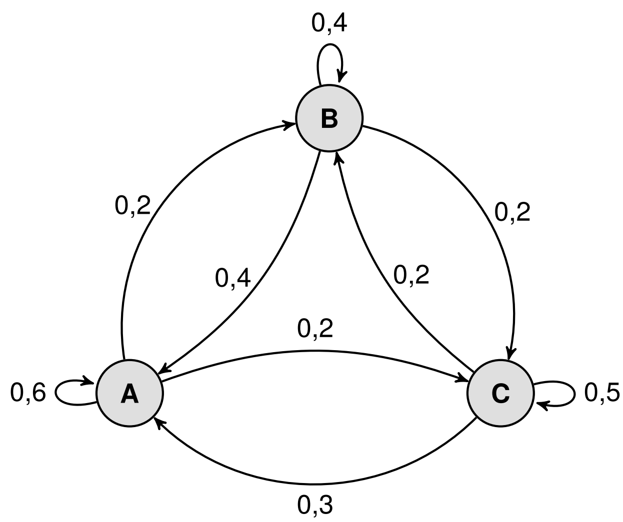
- Austauschprozesse = Übergangsprozesse zwischen verschiedenen Zuständen.

Beispiel 31.5. Drei große Städte A, B und C sind beliebte Touristenziele. Es werden 90 Millionen Touristen beobachtet, die jedes Jahr wieder in eine der drei Städte reisen. 2020 sah die Verteilung der Touristen wie folgt aus:

Stadt A: 30 Millionen **Stadt B:** 20 Millionen **Stadt C:** 40 Millionen

Das Übergangsverhalten der Touristen geht aus dem nebenstehendem Übergangsdiagramm hervor.

Die Touristen wechseln jedes Jahr mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten von einer Stadt in eine andere.



Diese Wahrscheinlichkeiten können im Diagramm abgelesen und in eine Tabelle eingetragen werden:

		von		
		A	B	C
	A	0,6	0,4	0,3
nach	B	0,2	0,4	0,2
	C	0,2	0,2	0,5

Lassen wir nun die Tabellengitter einfach weg, erhalten wir die sogenannte **Übergangsmatrix** M:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Nun ist es so, dass 2020 30 Millionen Touristen in der Stadt A waren, 20 Millionen in der Stadt B und 40 Millionen in der Stadt C.

Wir übertragen diese Startverteilung (in Millionen Touristen) in einen **Startvektor** (auch **Zustandsvektor** genannt):

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Mit der Übergangsmatrix und dem Startvektor können wir jetzt ganz einfach berechnen, wie die Verteilung 2021 aussieht.