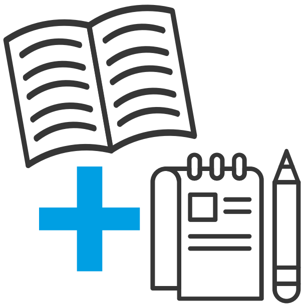
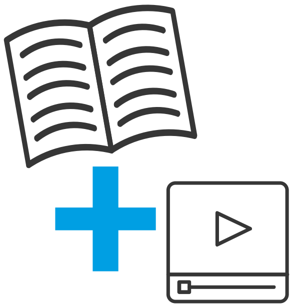
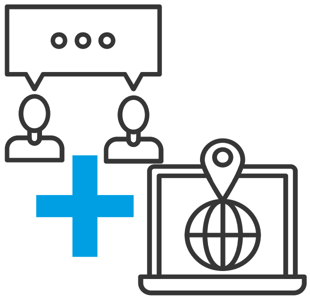
UNSER KONZEPT



Ausführliche Skripte, mit und ohne Übungen, zu wichtigen Themen für Schule bis Studium.



Einmalige Video-Verweise per QR-Code an entsprechenden, sinnvollen Stellen im Skript.



Noch Mathefragen? Interaktive Lernplattform für den effizienten Austausch von Mensch zu Mensch.

www.mathefragen.de

UNSERE AUTOREN

Christian Strack, Student der Mathematik und Physik, Head of Content/Community bei mathefragen.de, über 10 Jahre Nachhilfe-Erfahrung.

Christian auf LinkedIn

Daniel Jung, Mathe-Rockstar, „Mr. New Learning“ & Bildungsarchitekt. Er ist eines der bekanntesten Gesichter der Bildungsbranche. Der Pionier der „Mathe-Kurzerklärvideos“ gehört mit ca. 60 Mio. Views/Jahr zu den meist gesehenen Onlinetutoren weltweit und ist Gründer der Daniel Jung Academy.

www.danieljung.io

DJA

Inhaltsverzeichnis

1.1 Was ist eine Funktion?

Definition 1: Zuordnung

Eine *Zuordnung* ordnet einem Wert x einen Wert y eindeutig zu.
Man schreibt:

$$x \mapsto y$$

Beispiel 1: Zuordnungen

1. $$x \mapsto 2x$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den doppelten Wert $2x$ zu.

   $$4 \mapsto 2 \cdot 4 = 8$$

   $$1 \mapsto 2 \cdot 1 = 2$$

2. $$x \mapsto 5$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den konstanten Wert 5 zu.

   $$3 \mapsto 5$$

   $$9 \mapsto 5$$

3. $$x \mapsto \frac{x}{2}$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den halben Wert $\frac{x}{2}$ zu.

   $$\begin{array}{cccc} 10 & \mapsto & \frac{10}{2} & = & 5 \\ 2 & \mapsto & \frac{2}{2} & = & 1 \end{array}$$

Definition 2: Funktion

Eine *Funktion* f ordnet jedem Element x einer Menge D *genau ein* Element y einer Menge Z zu.

$$f : D \to Z,\ x \mapsto y$$

In dem folgenden Video wird nochmal anschaulich erklärt, was man unter einer Funktion versteht.

Definition 3: Definitionsmenge

Die Menge D (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Definitionsmenge*.

Definition 4: Zielmenge

Die Menge Z (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Zielmenge*.

Definition 5: Funktionswert

Das dem Element $x \in D$ durch eine Funktion zugeordnete Element $y \in Z$ nennt man *Funktionswert* und wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Satz 1: Funktionswert

In $f(x)$ steht f für die Bezeichnung der Funktion. f ist dabei die am häufigsten gewählte Bezeichnung. Manchmal stößt man aber auch auf andere Bezeichnungen wie $y(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ...
Der Ausdruck in der Klammer ist dabei die Variable, von der unser Funktionswert abhängt. Je nach Kontext kommen dort manchmal andere Bezeichnungen vor. Beschreibt die Funktion beispielsweise einen Sachzusammenhang der von der Zeit abhängt, so findet man oft anstatt eines x ein t in der Klammer ($f(t)$, $g(t)$ ...).

Eine Funktion f ist also eine Zuordnung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau einen Funktionswert $f(x)$ zuordnet. Dabei ist $f(x)$ ein Element der Zielmenge Z.

$$f : D \to Z, \; x \mapsto f(x)$$

Diese Darstellung einer Funktion wird nur genutzt, wenn es wichtig ist zu erwähnen, welche Menge die Definitions- bzw. die Zielmenge ist. Um sofort mit der Funktion rechnen zu können, stellt man Funktionen in der Regel durch eine sogenannte Funktionsgleichung dar.

Satz 2: Darstellung von Funktionen

Nehmen wir die Funktion

$$f : D \to Z,\ x \mapsto x + 2.$$

Wir können die Funktion auch durch eine Funktionsgleichung darstellen:

$$f(x) = x + 2$$

Manchmal nutzt man auch anstatt $f(x)$ ein y:

$$y = x + 2$$

Beispiel 2: Funktionen und ihre Darstellung

1.
$$D \to Z,\ x \mapsto 9x - 2$$
$$\begin{aligned} f(x) &= 9x - 2 \\ y &= 9x - 2 \end{aligned}$$

2.
$$D \to Z,\ x \mapsto x^2$$
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

3.
$$D \to Z,\ x \mapsto \sqrt{x}$$
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ y &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Definition 6: Lineare Funktion

Eine Funktion der Art

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto mx + n$$

nennt man *lineare Funktion*.

Satz 3: Darstellung linearer Funktionen

Wie wir bereits gesehen haben, können wir Funktionen auch als Funktionsgleichung schreiben:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & mx+n \\ y & = & mx+n \end{array}$$

Bei linearen Funktionen wählt man am häufigsten die Darstellung:

$$y = mx + n$$

Dabei ist die Bezeichnung des konstanten Terms n nicht einheitlich. Es finden sich auch oft die Darstellungen:

$$y = mx + b$$

$$y = mx + t$$

$$\vdots$$

In seltenen Fällen findet sich sogar eine andere Bezeichnung für m. Weitere Darstellungen mit einer anderen Bezeichnung für m sind:

$$y = ax + b$$

$$y = kx + d$$

$$\vdots$$

Auch wenn es anfänglich nicht so wirkt, so ist auch

$$ax + by + c = 0$$

eine lineare Funktion. Denn wir können diese in unsere Funktionsgleichung umformen:

$$\begin{array}{rccl} & ax+by+c & = & 0 \qquad \mid -ax-c \\ \Rightarrow & ax-ax+by+c-c & = & 0-ax-c \\ \Rightarrow & by & = & -ax-c \qquad \mid \div b \\ \Rightarrow & \frac{b}{b}y & = & \frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b} \end{array}$$

Setzen wir nun $\frac{-a}{b} = m$ und $\frac{-c}{b} = n$, erhalten wir:

$$y = mx + n$$

Wir werden uns in diesem Skript auf die Formen

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & mx+n \\ y & = & mx+n \end{array}$$

beschränken.

In dem folgenden Video wird nochmal auf die verschiedenen Bezeichnungen eingegangen.

1.2 Koordinatensysteme

Definition 7: Koordinaten

Koordinaten sind Zahlen, mit denen man die Lage eines Punktes angibt.

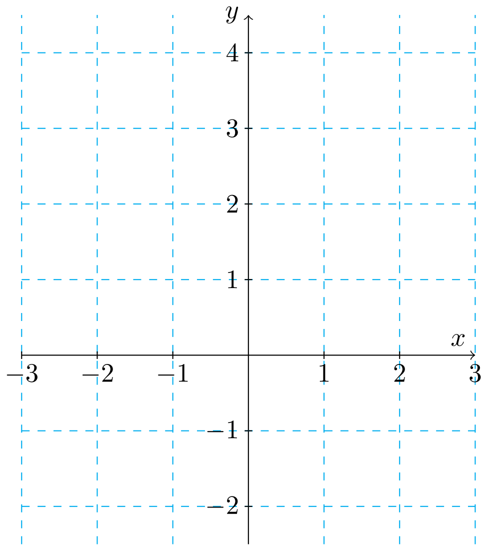
Definition 8: Koordinatensystem

Ein *Koordinatensystem* besteht aus zwei oder mehreren Achsen. Die Anzahl der Achsen gibt dabei die Dimension des Koordinatensystems an. Es repräsentiert dabei eine Ebene (zweidimensional) bzw einen Raum (dreidimensional). Mit Hilfe von Koordinaten lässt sich die Lage eines Punktes im Koordinatensystem eindeutig festlegen.

Es existieren viele verschiedene Koordinatensysteme. Allerdings benötigen wir, um lineare Funktionen zu verstehen, nur das sogenannte kartesische Koordinatensystem. Wir beschränken uns außerdem auf den zweidimensionalen Fall (also ein Koordinatensystem mit nur zwei Achsen).

Definition 9: Kartesisches Koordinatensystem

Das *kartesische Koordinatensystem* nutzt zueinader senkrecht stehende Koordinatenachsen. Das bedeutet, die beiden Achsen schneiden sich im rechten Winkel (90°). Im Allgemeinen wird die horizontale Achse als x-Achse bezeichnet und die Vertikale als y-Achse.



Im weiteren Verlauf dieses Skriptes wird immer vom *zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem* ausgegangen.

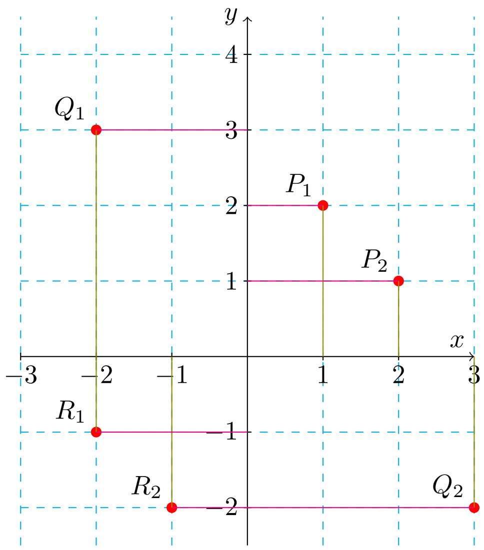
Definition 10: Punkt

Ein *Punkt* P ist ein geordnetes Zahlenpaar, bestehend aus einer x-Koordinate und einer y-Koordinate.

$$P(x|y)$$

Wir nennen das Zahlenpaar geordnet, da die Reihenfolge der Zahlen entscheidend ist. Der zuerst genannte Zahlenwert entspricht dabei der ersten Koordinate und der als Zweites genannte Wert der zweiten Koordinate. Also ist $P(2|1) \neq P(1|2)$.

Beispiel 3: Punkte



$$Q_1(-2|3) \neq Q_2(3|-2)$$
$$P_1(1|2) \neq P_2(2|1)$$
$$R_1(-2|1) \neq R_2(1|-2)$$

In dem folgenden Video wird nochmal darauf eingegangen, wie Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden.