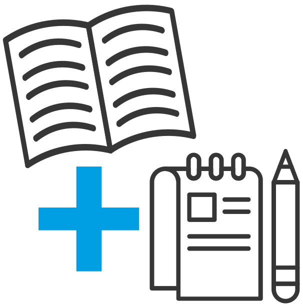
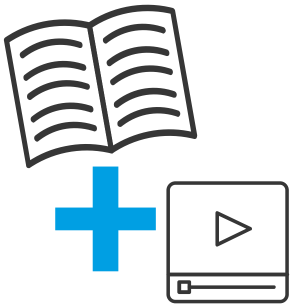
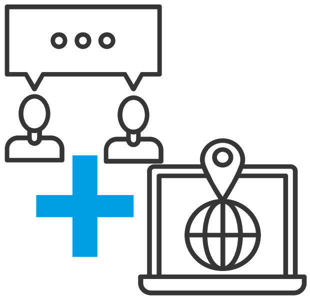
UNSER KONZEPT



Ausführliche Skripte, mit und ohne Übungen, zu wichtigen Themen für Schule bis Studium.



Einmalige Video-Verweise per QR-Code an entsprechenden, sinnvollen Stellen im Skript.



Noch Mathefragen? Interaktive Lernplattform für den effizienten Austausch von Mensch zu Mensch.

www.mathefragen.de

UNSERE AUTOREN

Christian Strack, Student der Mathematik und Physik, Head of Content/Community bei mathefragen.de, über 10 Jahre Nachhilfe-Erfahrung.

Christian auf LinkedIn

Daniel Jung, Mathe-Rockstar, „Mr. New Learning“ & Bildungsarchitekt. Er ist eines der bekanntesten Gesichter der Bildungsbranche. Der Pionier der „Mathe-Kurzerklärvideos“ gehört mit ca. 60 Mio. Views/Jahr zu den meist gesehenen Onlinetutoren weltweit und ist Gründer der Daniel Jung Academy.

www.danieljung.io

Inhaltsverzeichnis

1.1 Was ist eine Folge?

Definition 1: Zuordnung

Eine *Zuordnung* ordnet einem Wert x einen Wert y eindeutig zu.
Man schreibt:

$$x \mapsto y$$

Beispiel 1: Zuordnungen

1. $$x \mapsto 2x$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den doppelten Wert $2x$ zu.

   $$4 \mapsto 2 \cdot 4 = 8$$

   $$1 \mapsto 2 \cdot 1 = 2$$

2. $$x \mapsto 5$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den konstanten Wert 5 zu.

   $$3 \mapsto 5$$

   $$9 \mapsto 5$$

3. $$x \mapsto \frac{x}{2}$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den halben Wert $\frac{x}{2}$ zu.

   $$\begin{array}{cccc} 10 & \mapsto & \frac{10}{2} & = & 5 \\ 2 & \mapsto & \frac{2}{2} & = & 1 \end{array}$$

Definition 2: Folge

Eine *Folge* a_n ist eine Zuordnung, die jeder natürlichen Zahl i einen Wert a_i aus einer Menge M zuordnet.

$$a_n : \mathbb{N} \to M,\ i \mapsto a_i$$

Die a_i nennen wir Folgenglieder.

Satz 1: Darstellung von Folgen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Zuordnung der Folge zu definieren.

1. Aufzählung:
   Durch Aufzählen der ersten Folgenglieder kann man einen Verlauf assoziieren.
   $$a_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$
   Man würde nun intuitiv davon ausgehen, dass das nächste Folgenglied die 5 ist usw. Allerdings muss man bei dieser Art der Darstellung vorsichtig sein, weil diese nicht eindeutig ist. Zum Beispiel ist eine andere Möglichkeit, dass sich die Folge nach der 4 wiederholt und wieder bei der 1 anfängt.
   $$a_n = \{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots\}$$

2. Funktionsvorschrift:
   Die meisten Folgen können wie eine Funktion durch eine Vorschrift definiert werden.
   $$a_n = \frac{n+1}{n}$$
   Wenn wir dann eine natürliche Zahl einsetzen, erhalten wir das eindeutig zugehörige Folgenglied. Zum Beispiel ist das 6te Folgenglied:
   $$a_6 = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$
   Anstatt
   $$a_n = \frac{n+1}{n}$$
   findet man auch die Darstellung
   $$\left(\frac{n+1}{n}\right)_n$$

3. Rekursive Vorschrift:
   Bei einer rekursiven Vorschrift ist jedes Folgenglied abhängig von einem oder mehreren vorherigen Folgengliedern. Das vermutlich bekannteste Beispiel ist die Fibonacci-Folge:
   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \,\text{für}\, n \geq 3$$
   Wählen wir beispielsweise $a_1 = a_2 = 1$, erhalten wir:
   $$a_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

In dem folgenden Video wird nochmal auf die verschiedenen Darstellungen von Folgen eingegangen.

Satz 2: Arten von Folgen

Zum besseren Verständnis wollen wir uns drei sehr häufig vorkommende Typen von Folgen angucken:

1. Arithmetische Folge:
   Bei einer arithmetischen Folge wird immer ein konstanter Wert d addiert, um das nächste Folgenglied zu erhalten. In der rekursiven Darstellung bedeutet das:
   $$a_n = a_{n-1} + d$$
   und als Funktionsvorschrift erhalten wir:
   $$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
2. Geometrische Folge:
   Bei einer geometrischen Folge wird ein konstanter Wert q multipliziert. Damit erhalten wir die rekursive Darstellung:
   $$a_n = a_{n-1} \cdot q$$
   Als Funktionsvorschrift erhalten wir:
   $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
3. Alternierende Folge:
   Die Folgenglieder einer alternierenden Folge ändern immer abwechselnd ihr Vorzeichen:
   $$a_n = (-1)^n \cdot b_n$$
   wobei b_n eine beliebige Folge mit nichtnegativen Folgengliedern ist.

In dem folgenden Video wird nochmal auf die arithmetische und geometrische Folge eingegangen.

3.1 Konvergenz beweisen

1.

Aufgabe 1: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Beweise die Konvergenz der folgenden Folge, ohne Zuhilfenahme der Grenzwertsätze:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Lösung:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Um die Konvergenz zu beweisen, müssen wir zuerst wissen wie der Grenzwert aussieht.
Wir haben in einem Beispiel bereits gesehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

gilt. Um die Konvergenz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass die Definition der Konvergenz erfüllt wird:

$$\forall\varepsilon < 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $a = 0$ gilt:

$$\begin{array}{rcc} |a_n - a| & = & \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| \\ & = & \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \\ & = & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & \stackrel{n\geq N}{\leq} & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ & \stackrel{Def}{<} & \varepsilon \end{array}$$

Wir formen die letzte Ungleichung noch um:

$$\begin{array}{rcccl} & \frac{1}{\sqrt{N}} & < & \varepsilon & |^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{N} & < & \varepsilon^2 & | \cdot N \\ \Rightarrow & 1 & < & N \cdot \varepsilon^2 & | \div \varepsilon^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\varepsilon^2} & < & N & \end{array}$$

Damit ist für alle Folgenglieder ab

$$n \geq N > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

der Abstand zum Grenzwert kleiner als ε und die Konvergenz somit bewiesen.

Du hast eine Frage zu dieser Aufgabe? Dann klicke **hier** oder auf den QR-Code

und sage uns, was unklar geblieben ist.