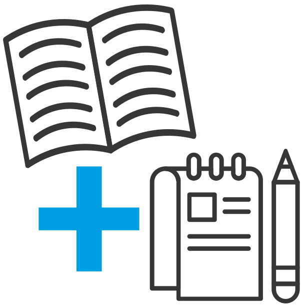
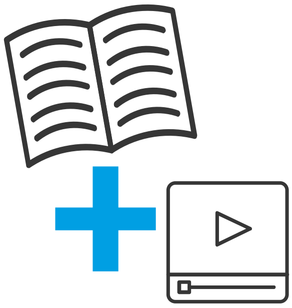
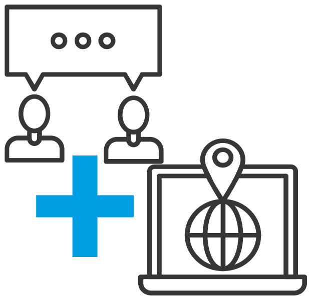
UNSER KONZEPT



Ausführliche Skripte, mit und ohne Übungen, zu wichtigen Themen für Schule bis Studium.



Einmalige Video-Verweise per QR-Code an entsprechenden, sinnvollen Stellen im Skript.



Noch Mathefragen? Interaktive Lernplattform für den effizienten Austausch von Mensch zu Mensch.

www.mathefragen.de

UNSERE AUTOREN

Christian Strack, Student der Mathematik und Physik, Head of Content/Community bei mathefragen.de, über 10 Jahre Nachhilfe-Erfahrung.

Christian auf LinkedIn

Daniel Jung, Mathe-Rockstar, „Mr. New Learning“ & Bildungsarchitekt. Er ist eines der bekanntesten Gesichter der Bildungsbranche. Der Pionier der „Mathe-Kurzerklärvideos“ gehört mit ca. 60 Mio. Views/Jahr zu den meist gesehenen Onlinetutoren weltweit und ist Gründer der Daniel Jung Academy.

www.danieljung.io

Inhaltsverzeichnis

1.1 Was ist eine Funktion?

Definition 1: Zuordnung

Eine *Zuordnung* ordnet einem Wert x einen Wert y eindeutig zu.
Man schreibt:

$$x \mapsto y$$

Beispiel 1: Zuordnungen

1. $$x \mapsto 2x$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den doppelten Wert $2x$ zu.

   $$4 \mapsto 2 \cdot 4 = 8$$

   $$1 \mapsto 2 \cdot 1 = 2$$

2. $$x \mapsto 5$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den konstanten Wert 5 zu.

   $$3 \mapsto 5$$

   $$9 \mapsto 5$$

3. $$x \mapsto \frac{x}{2}$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den halben Wert $\frac{x}{2}$ zu.

   $$\begin{array}{cccc} 10 & \mapsto & \frac{10}{2} & = & 5 \\ 2 & \mapsto & \frac{2}{2} & = & 1 \end{array}$$

Definition 2: Funktion

Eine *Funktion* f ordnet jedem Element x einer Menge D *genau ein* Element y einer Menge Z zu.

$$f : D \to Z,\ x \mapsto y$$

In dem folgenden Video wird nochmal anschaulich erklärt, was man unter einer Funktion versteht.

Definition 3: Definitionsmenge

Die Menge D (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Definitionsmenge*.

Definition 4: Zielmenge

Die Menge Z (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Zielmenge*.

Definition 5: Funktionswert

Das dem Element $x \in D$ durch eine Funktion zugeordnete Element $y \in Z$ nennt man *Funktionswert* und wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Satz 1: Funktionswert

In $f(x)$ steht f für die Bezeichnung der Funktion. f ist dabei die am häufigsten gewählte Bezeichnung. Manchmal stößt man aber auch auf andere Bezeichnungen wie $y(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ...
Der Ausdruck in der Klammer ist dabei die Variable, von der unser Funktionswert abhängt. Je nach Kontext kommen dort manchmal andere Bezeichnungen vor. Beschreibt die Funktion beispielsweise einen Sachzusammenhang der von der Zeit abhängt, so findet man oft anstatt eines x ein t in der Klammer ($f(t)$, $g(t)$ ...).

Eine Funktion f ist also eine Zuordnung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau einen Funktionswert $f(x)$ zuordnet. Dabei ist $f(x)$ ein Element der Zielmenge Z.

$$f : D \to Z, \ x \mapsto f(x)$$

Diese Darstellung einer Funktion wird nur genutzt, wenn es wichtig ist zu erwähnen, welche Menge die Definitions- bzw. die Zielmenge ist. Um sofort mit der Funktion rechnen zu können, stellt man Funktionen in der Regel durch eine sogenannte Funktionsgleichung dar.

3.1 Quotient aus zwei Funktionen

1.

Aufgabe 1: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Bestimme die Ableitung des folgenden Quotienten:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

Wir haben einen Quotient von zwei Funktionen. Deshalb machen wir Gebrauch von der Quotientenregel.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{u(x)}{v(x)} \\ \Rightarrow \quad f'(x) & = & \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \end{array}$$

Damit gilt

$$u(x) = x + 1 \text{ und } v(x) = x^2$$

Nun leiten wir jede Funktion einzeln ab.

a)

$$u(x) = x + 1$$

Um diese Summe von Potenzfunktionen abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Außerdem nutzen wir die Summenregel, um jeden Summanden einzeln abzuleiten.

$$\begin{array}{rclcl} u'(x) & = & \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} & + & \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} \\ & = & 1x^{1-1} & + & 0 \\ & = & 1x^0 & & \\ & = & 1 & & \end{array}$$

b)

$$v(x) = x^2$$

Um diese Potenzfunktion abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} \\ &= 2x^{2-1} \\ &= 2x^1 \\ &= 2x \end{aligned}$$

Nun können wir in die Quotientenregel einsetzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1\cdot x^2 - (x+1)\cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 - 2x}{x^4} \\ &= -\frac{x+2}{x^3} \end{aligned}$$

Du hast eine Frage zu dieser Aufgabe? Dann klicke **hier** oder auf den QR-Code

und sage uns, was unklar geblieben ist.

2.

Aufgabe 2: $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+12}$

Bestimme die Ableitung des folgenden Quotienten:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+12}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+12}$$

Wir haben einen Quotient von zwei Funktionen. Deshalb machen wir Gebrauch von der Quotientenregel.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{u(x)}{v(x)} \\ \Rightarrow \quad f'(x) & = & \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2} \end{array}$$

Damit gilt

$$u(x) = x^2+2x-3 \text{ und } v(x) = x+12$$

Nun leiten wir jede Funktion einzeln ab.

a)

$$u(x) = x^2+2x-3$$

Um diese Summe von Potenzfunktionen abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Außerdem nutzen wir die Summenregel, um jeden Summanden einzeln abzuleiten.

$$\begin{array}{rcccccc} u'(x) & = & \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} & + & \frac{\mathrm{d}(2x)}{\mathrm{d}x} & + & \frac{\mathrm{d}(-3)}{\mathrm{d}x} \\ & = & 2x^{2-1} & + & 2x^{1-1} & + & 0 \\ & = & 2x^1 & + & 2x^0 & & \\ & = & 2x & + & 2 & & \end{array}$$

b)

$$v(x) = x+12$$

Um diese Summe von Potenzfunktionen abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Außerdem nutzen wir die Summenregel, um jeden Summanden einzeln abzuleiten.

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(12)}{\mathrm{d}x} \\ &= 1x^{1-1} + 0 \\ &= 1x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nun können wir in die Quotientenregel einsetzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(2x+2)\cdot(x+12)-(x^2+2x-3)\cdot 1}{(x+12)^2} \\ &= \frac{2x^2+24x+2x+24-x^2-2x+3}{x^2+24x+144} \\ &= \frac{x^2+24x+27}{x^2+24x+144} \end{aligned}$$

Du hast eine Frage zu dieser Aufgabe? Dann klicke **hier** oder auf den QR-Code

und sage uns, was unklar geblieben ist.

3.

Aufgabe 3: $f(x) = \frac{15-x^2}{5x^5}$

Bestimme die Ableitung des folgenden Quotienten:

$$f(x) = \frac{15 - x^2}{5x^5}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{15 - x^2}{5x^5}$$

Wir haben einen Quotient von zwei Funktionen. Deshalb machen wir Gebrauch von der Quotientenregel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{u(x)}{v(x)} \\ \Rightarrow \quad f'(x) &= \tfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$u(x) = 15 - x^2 \text{ und } v(x) = 5x^5$$

Nun leiten wir jede Funktion einzeln ab.

a)

$$u(x) = 15 - x^2$$

Um diese Summe von Potenzfunktionen abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Außerdem nutzen wir die Summenregel, um jeden Summanden einzeln abzuleiten.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \tfrac{\mathrm{d}(15)}{\mathrm{d}x} + \tfrac{\mathrm{d}(-x^2)}{\mathrm{d}x} \\ &= 0 - 2x^{1-1} \\ &= -2x^1 \\ &= -2x \end{aligned}$$

b)

$$v(x) = 5x^5$$

Um diese Potenzfunktion abzuleiten, nutzen wir die Potenzregel.

$$\frac{\mathrm{d}(ax^n)}{\mathrm{d}x} = a \cdot nx^{n-1}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} v'(x) &= \tfrac{\mathrm{d}(5x^5)}{\mathrm{d}x} \\ &= 5 \cdot 5x^{5-1} \\ &= 25x^4 \end{aligned}$$