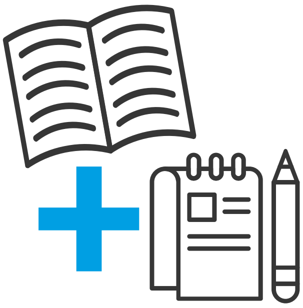
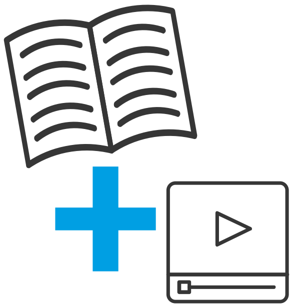
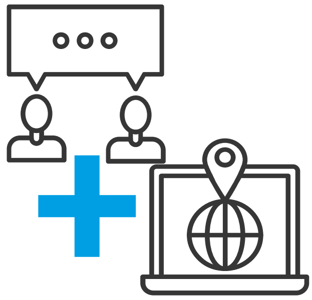
UNSER KONZEPT



Ausführliche Skripte, mit und ohne Übungen, zu wichtigen Themen für Schule bis Studium.



Einmalige Video-Verweise per QR-Code an entsprechenden, sinnvollen Stellen im Skript.



Noch Mathefragen? Interaktive Lernplattform für den effizienten Austausch von Mensch zu Mensch.

www.mathefragen.de

UNSERE AUTOREN

Christian Strack, Student der Mathematik und Physik, Head of Content/Community bei mathefragen.de, über 10 Jahre Nachhilfe-Erfahrung.

Christian auf LinkedIn

Daniel Jung, Mathe-Rockstar, „Mr. New Learning“ & Bildungsarchitekt. Er ist eines der bekanntesten Gesichter der Bildungsbranche. Der Pionier der „Mathe-Kurzerklärvideos“ gehört mit ca. 60 Mio. Views/Jahr zu den meist gesehenen Onlinetutoren weltweit und ist Gründer der Daniel Jung Academy.

www.danieljung.io

DJA

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen - Kurz und knapp **1**
1.1 Was ist eine Funktion? 2
1.2 Potenzfunktionen 5
1.3 Differentialquotient 9
1.4 Ableitungsregeln 14

2 Aufgaben **20**
2.1 Potenzfunktionen 21
2.2 Summe von Potenzfunktionen 22

3 Lösungen **24**
3.1 Potenzfunktionen 25
3.2 Summe von Potenzfunktionen 40

1.1 Was ist eine Funktion?

Definition 1: Zuordnung

Eine *Zuordnung* ordnet einem Wert x einen Wert y eindeutig zu.
Man schreibt:

$$x \mapsto y$$

Beispiel 1: Zuordnungen

1. $$x \mapsto 2x$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den doppelten Wert $2x$ zu.

   $$4 \mapsto 2 \cdot 4 = 8$$

   $$1 \mapsto 2 \cdot 1 = 2$$

2. $$x \mapsto 5$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den konstanten Wert 5 zu.

   $$3 \mapsto 5$$

   $$9 \mapsto 5$$

3. $$x \mapsto \frac{x}{2}$$

   Diese Zuordnung ordnet jedem Wert x den halben Wert $\frac{x}{2}$ zu.

   $$\begin{array}{cccc} 10 & \mapsto & \frac{10}{2} & = & 5 \\ 2 & \mapsto & \frac{2}{2} & = & 1 \end{array}$$

Definition 2: Funktion

Eine *Funktion* f ordnet jedem Element x einer Menge D *genau ein* Element y einer Menge Z zu.

$$f : D \to Z,\ x \mapsto y$$

In dem folgenden Video wird nochmal anschaulich erklärt, was man unter einer Funktion versteht.

Definition 3: Definitionsmenge

Die Menge D (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Definitionsmenge*.

Definition 4: Zielmenge

Die Menge Z (aus Definition 2: Funktion) nennt man *Zielmenge*.

Definition 5: Funktionswert

Das dem Element $x \in D$ durch eine Funktion zugeordnete Element $y \in Z$ nennt man *Funktionswert* und wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Satz 1: Funktionswert

In $f(x)$ steht f für die Bezeichnung der Funktion. f ist dabei die am häufigsten gewählte Bezeichnung. Manchmal stößt man aber auch auf andere Bezeichnungen wie $y(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ...
Der Ausdruck in der Klammer ist dabei die Variable, von der unser Funktionswert abhängt. Je nach Kontext kommen dort manchmal andere Bezeichnungen vor. Beschreibt die Funktion beispielsweise einen Sachzusammenhang der von der Zeit abhängt, so findet man oft anstatt eines x ein t in der Klammer ($f(t)$, $g(t)$ ...).

Eine Funktion f ist also eine Zuordnung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau einen Funktionswert $f(x)$ zuordnet. Dabei ist $f(x)$ ein Element der Zielmenge Z.

$$f : D \to Z,\ x \mapsto f(x)$$

Diese Darstellung einer Funktion wird nur genutzt, wenn es wichtig ist zu erwähnen, welche Menge die Definitions- bzw. die Zielmenge ist. Um sofort mit der Funktion rechnen zu können, stellt man Funktionen in der Regel durch eine sogenannte Funktionsgleichung dar.

Satz 2: Darstellung von Funktionen

Nehmen wir die Funktion

$$f : D \to Z,\ x \mapsto x + 2.$$

Wir können die Funktion auch durch eine Funktionsgleichung darstellen:

$$f(x) = x + 2$$

Manchmal nutzt man auch anstatt $f(x)$ ein y:

$$y = x + 2$$

Beispiel 2: Funktionen und ihre Darstellung

1. $$D \to Z,\ x \mapsto 9x - 2$$
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 9x - 2 \\ y & = & 9x - 2 \end{array}$$

2. $$D \to Z,\ x \mapsto x^2$$
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 \\ y & = & x^2 \end{array}$$

3. $$D \to Z,\ x \mapsto \sqrt{x}$$
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sqrt{x} \\ y & = & \sqrt{x} \end{array}$$

1.2 Potenzfunktionen

Definition 6: Potenzfunktion

Eine Funtktion der Art

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^r \quad \text{mit } a, r \in \mathbb{R}$$

nennt man *Potenzfunktion*.

Wie wir gerade gesehen haben, ist die allgemeine Form einer Potenzfunktion:

$$f(x) = ax^r \quad \text{mit } a, r \in \mathbb{R}$$

Nun lassen sich Potenzfunktionen je nach r spezifizieren.

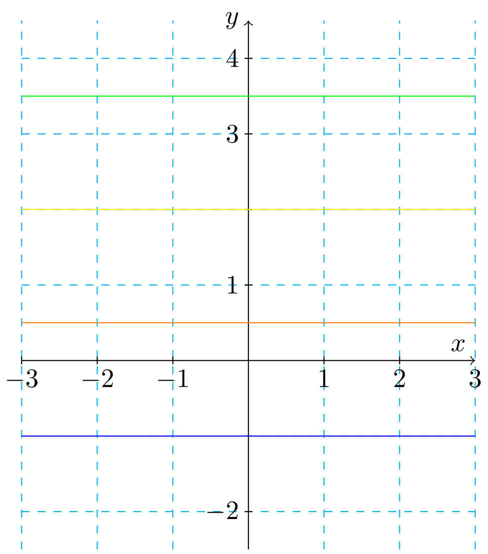
Satz 3: Konstante Funktion

Eine *konstante Funktion* ordnet jedem x-Wert aus der Defnitionsmenge denselben Wert a zu.

$$f(x) = a = a \cdot 1 = ax^0$$

Wenn also $r = 0$ gilt, erhalten wir eine *konstante Funktion*.

Beispiel 3: Konstante Funktionen



$$f(x) = -1$$
$$f(x) = 0{,}5$$
$$f(x) = 2$$
$$f(x) = 3{,}5$$

In dem folgenden Video wird nochmal anschaulich der Übergang von der Sekante zur Tangente gezeigt und was dieser Prozess mit der Steigung zu tun hat.

Satz 8: Limes

Eines der wichtigsten Werkzeuge der Analysis ist der Grenzwert (Limes). Oft ist es von großer Bedeutung zu wissen, was passiert, wenn wir Zahlen sehr klein bzw sehr groß werden lassen. Wenn wir die Steigung einer Funktion bestimmen wollen, bilden wir eine Sekante durch zwei unendlich nah beieinander liegende Punkte. Dadurch erhalten wir im Grenzfall eine Tangente, die dieselbe Steigung aufweist, wie der Punkt an dem die Tangente den Graphen der Funktion berührt. Solche Grenzwerte werden mit Limes bezeichnet. Formal schreibt man

$$\lim_{x_1 \to x_2} x_1 = x_2$$

wenn man x_1 gegen x_2 laufen lässt.

Beispiel 7: Limes

Wir wollen wissen was mit der Funktion $f(x) = x^2$ passiert, wenn x unendlich groß wird. Formal bedeutet das:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2$$

Wenn wir eine sehr große Zahl einsetzen, nehmen wir beispielsweise $x = 10^{10}$ (das ist eine 1 mit 10 Nullen), erhalten wir:

$$f(10^{10}) = (10^{10})^2 = 10^{20}$$

Das Ergebnis ist eine 1 mit 20 Nullen. Die Funktionswerte werden also immer größer. Die Funktion geht also, wenn wir x unendich groß werden lassen, selbst gegen unendlich. Wir schreiben:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

Definition 10: Differenzenquotient

Der *Differenzenquotient* ist das Verhältnis aus Änderung des Funktionswertes und der Änderung der Variablen.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Der erste Differenzenquotient den wir kennengelernt haben, ist das Steigungsdreieck.

Satz 9: Differentialquotient

Um nun die tatsächliche Steigung in einem Punkt zu berechnen, kommen wir zum *Differentialquotienten*. Dafür lassen wir den Abstand Δx gegen Null streben. Das bedeutet $x_2 \to x_1$.

$$m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dadurch erhalten wir die Steigung einer Tangente, die den Graphen im Punkt $P(x_1|f(x_1))$ schneidet. Der Grenzwert des Differenzenquotient ist also der Differentialquotient.

Satz 10: h-Methode

Wenn wir anstatt $x_2 \to x_1$ den Abstand $\Delta x = h$ gegen Null streben lassen, erhalten wir auch die Steigung der Tangente, die den Graph im Punkt $P(x_1|f(x_1))$ schneidet. Allerdings erhalten wir eine andere Darstellung des Differentialquotienten.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Wir haben zwei verschiedene Darstellungen des Differentialquotienten kennengelernt. Dabei ist es egal, welchen von beiden man nutzt um die Steigung zu berechnen. Meistens wird die h-Methode gewählt. Wir wollen uns im weiteren Verlauf auch auf die h-Methode beschränken.

In den folgenden Videos wird nochmal alles zum Differentialquotienten zusammengefasst.