Inhalt

Vorwort

Dieses 124 Seiten starke Lernheft führt dich durch die relevanten Inhalte der Veranstaltung *Analysis 2* für Lehramt. Dabei steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik“ kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln, anstatt sie mit Faszination zu entdecken. Wenngleich das folgende Zitat des berühmten Mathematikers Georg Cantor in vielerlei Hinsicht Interpretationsspielraum bietet, nutzen wir es für dieses Lernheft:

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit!

Dieses Lernheft stellt somit eher einen alternativen Zugang zu den Themen dar. Wir sind der Meinung, dass auf dem Verständnis der grundsätzlichen, inhaltlichen Zusammenhänge der Themengebiete aufgebaut werden kann, um den Sinn hinter allen mathematischen Notationen zu begreifen. In Vorlesungen wird üblicherweise der genau gegenteilige Weg eingeschlagen. Man könnte sagen, dieses Lernheft stellt die berühmte *andere Seite der Medaille* dar.

Zusätzlich zu den abgedruckten Erläuterungen und Beispielen findest du an den Seitenrändern insgesamt 123 QR-Codes zu Daniel Jungs Mathe Erklärvideos; direkt auf die jeweiligen Themen abgestimmt. Damit erhältst du zusätzliche Erklärungen, die du in deinem eigenen Tempo so oft ansehen kannst, wie du willst.

Am Ende jedes Kapitels sind Übungsaufgaben zu finden (insgesamt 75 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst. Dabei sind folgende Schwierigkeitsstufen zu finden:

Level: Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 24 Aufgaben.**

Level: Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 47 Aufgaben.**

Level: Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 4 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung. Die Lösungen zu den Aufgaben findest du auf unserer Webseite, die über den jeweils angegebenen QR-Code zu erreichen ist.

Sollte sich doch mal ein Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an dem Lernheft. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der *Analysis 2* Veranstaltung.

Feedback

— Dr. Andreas Stahl

3 Differentiation

In der Welt der Analysis 2 tauchen wir tief in die Differentiation mehrerer Veränderlicher ein. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Aussagen und Feinheiten, die uns den Umgang mit mehrdimensionalen Funktionen erleichtern. Dabei werden wir bei den grundlegenden Konzepten der Richtungsableitungen und partiellen Ableitungen beginnen und uns anschließend mit fortgeschrittenen Themen wie der totalen Differenzierbarkeit und lokalen Extrema unter Nebenbedingungen beschäftigen. Abschließen werden wir dieses Kapitel mit einem ersten Ausblick auf die Thematik der Gradientenvektorfelder, welche im späteren Verlauf der Integration nochmals vertieft wird.

Einführung in Analysis 2

3.1 Richtungsableitungen

3.1.1 Definition und Einführung

Richtungsableitung - Erklärung und Berechnung

Die Richtungsableitung einer Funktion f mit mehreren Variablen beschreibt die Änderungsrate der Funktion in einer bestimmten Richtung, die durch einen Vektor $\vec{v}$ vorgegeben wird. Sie verallgemeinert die Idee der Ableitung einer eindimensionalen Funktion, die nur die Änderungsrate in Richtung der x-Achse beschreibt.

> Die **Richtungsableitung** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ am Punkt $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ wird mit $D_v f(x)$ bezeichnet und ist durch
>
> $$D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$
>
> definiert. Falls dieser Limes existiert, beschreibt $D_{\vec{v}} f(x)$ die **momentane Änderungsrate** von f in Richtung v an der Stelle x.
>
> Wir sprechen bei der partielle Ableitung von der lokalen Approximation der Funktion f mit Hilfe von Graden in beliebige Richtungen v.

Beispiel - Richtungsableitung (1):

In diesem Beispiel möchten wir die Richtungsableitung von der Funktion $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ für die beiden Richtungsvektoren

$$v = (1, 1) \quad \text{und} \quad w = (-1, 2)$$

bestimmen für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestimmen. Dazu setzen wir die Funktion und den jeweiligen Richtungsvektor in die Definition ein und berechnen:

1. Richtung v:

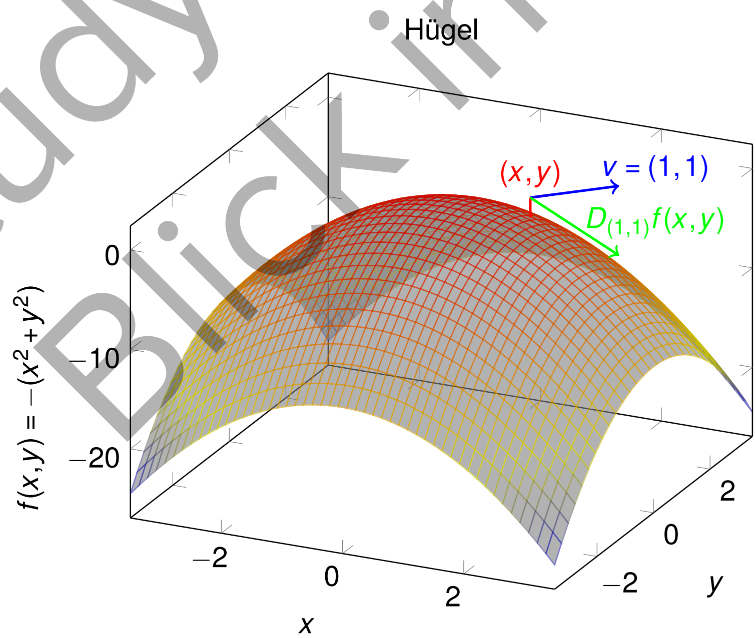
$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2-(y+h)^2+(x^2+y^2)}{h} && \text{(Definition der Richtungsableitung)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2hx-2hy-2h^2}{h} && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= \lim_{h\to 0} -2x-2y-2h && \text{(Kürzen)}\\
&= \boxed{-2x-2y} && \text{(Grenzwert bilden)}
\end{aligned}$$

2. Richtung w:

$$\begin{aligned}
D_{\vec{w}} f(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x-h)^2-(y+2h)^2+(x^2+y^2)}{h} && \text{(Definition der Richtungsableitung)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx-4hy-4h^2}{h} && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= \lim_{h\to 0} 2x-4y-4h && \text{(Kürzen)}\\
&= \boxed{2x-4y} && \text{(Grenzwert bilden)}
\end{aligned}$$

Das Beispiel kann man sich wie folgt vorstellen:
Wir stehen auf einem Hügel, den wir durch die Funktion f modellieren können und gehen in die Richtung v. Die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(x)$ gibt uns an, welche Steigung beziehungsweise Abfall der Hügel in diese Richtung besitzt.

Visuell lässt es sich so modellieren, als befinden wir uns im Punkt (x,y) auf einem Hügel und gehen in Richtung $v=(1,1)$, so ist die momentane Steigung, also die aktuelle Gehrichtung $D_v f(x,y)$:



3.1.2 Partielle Ableitung

Partielle Ableitungen sind ein Werkzeug aus der Analysis, mit dem man Funktionen mit mehreren Variablen untersuchen kann. Anders als bei gewöhnlichen Ableitungen, bei denen man nur nach einer Variablen ableitet, betrachtet man bei partiellen Ableitungen eine von mehreren Variablen und hält die verbleibenden konstant. Die Definition der partiellen Ableitungen erhalten wir durch die Richtungsableitungen:

Partielle Ableitung: Einführung (1)

Partielle Ableitung: Einführung (2)

> Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, sodass $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))^T$. Wir sagen, dass f an der Stelle $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ **partiell differenzierbar** ist, falls der folgende Grenzwert für alle $j = 1, ..., m$, also für jede Komponentenfunktion f_j der Funktion f, existiert:
>
> $$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f_j(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$
>
> Wir erhalten für die partielle Ableitung der Funktion f im Punkt $x = (x_1, ..., x_n)$ durch
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right).$$
>
> Ist f für alle Vektoren x im Definitionsbereich partiell differenzierbar, so sagen wir, dass f partiell differenzierbar ist. Fassen wir alle partiellen Ableitungen nach jeder Variablen x_i für $i = 1, ..., n$ zusammen, so erhalten wir die **Jacobi-Matrix** $J_f(x)$ von f:
>
> $$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
>
> Als Kurzschreibweise hat sich die folgende Abkürzung durchgesetzt: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$

Es fällt auf, dass die partielle Ableitung der Richtungsableitung für den Vektor

$$v = e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0),$$

dem i-ten Einheitsvektor, der nur an der Stelle i den Eintrag 1 besitzt und an allen anderen Stellen eine 0, entspricht.

Differential-operator (1)

Für die Ableitungen nach einer Variablen gelten alle Rechenregeln, die wir für die Differentiation einer Veränderlichen aus der Analysis 1 kennengelernt haben.

Differential-operator (2)

Beispiel - Partielle Ableitung (1):
In diesem Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. Diese Funktion hat zwei Variablen, x und y, sodass wir zwei partielle Ableitungen bestimmen können:

1. Partielle Ableitung nach x:

   Hierbei leiten f nach x ab. Das bedeutet, dass alle anderen Variablen, in diesem Fall ist das lediglich y, als Konstante angesehen werden können. Damit erhalten wir

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial x} y^2 = 2x + 0 = \boxed{2x}.$$

Aufgabe 30 (Level:)
Zeige oder widerlege, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \log|x \cdot y| & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(1,0)$ total differenzierbar ist.

Aufgabe 31 (Level:)
Bestimme die lokalen Extrema der Funktionen:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{2}$$
$$g(x,y) = e^{x^2+y^2+xy}$$

Aufgabe 32 (Level:)
Zeige oder widerlege die totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$ und berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Aufgabe 33 (Level:)
Bestimme das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

im Entwicklungspunkt $(x,y) = (0,0)$.

Aufgabe 34 (Level:)
Bestimme das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktionen

$$f(x,y) = e^x \cdot \sin(y)$$
$$g(x,y) = \sin(x \cdot y)$$

im Entwicklungspunkt $(x,y) = (0,0)$.

Aufgabe 35 (Level:)
Berechne für die Vektoren $v = (1,-2)$ und $w = (\pi,0)$ die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = e^{\sin(x-y)}.$$

Aufgabe 36 (Level:)
Zeige oder widerlege, dass die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

im Punkt $P = (1,1)$ lokal umkehrbar ist.

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Systeme von Differentialgleichungen sind vergleichbar mit Gleichungssystemen aus der Schulmathematik oder Analysis 1. Es werden mehrere Differentialgleichungen zu einem System zusammengefasst, die gleichzeitig erfüllt sein sollen und sich in der Regel gegenseitig bedingen.

4.4.1 Homogene lineare Differentialgleichungssysteme

Wir starten mit der Betrachtung des homogenen Falls linearer Differentialgleichungen.

Homogenes lineares DGL-System

Allgemein ist ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem von der Form

$$y' = A \cdot y,$$

wobei:

- y ein Vektor von Funktionen ist, typischerweise $y(x) = y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$. Wir sprechen dann von einem Differentialgleichungssystem der Dimension n.
- x die unabhängige Variable ist, für die auch andere Bezeichnungen wie t genommen werden können.
- A eine $n \times n$-Matrix von Funktionen ist, die die Koeffizientenmatrix des DGL-Systems darstellt.
- y' ist der Vektor der Ableitungen von y nach x, also $y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')^T$.

Die Lösung eines solchen linearen DGL-Systems funktioniert nach folgendem Schema:

1. **Differentialgleichungssystem in Matrixschreibweise umwandeln:**
   Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem in der Form:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_1^{(k)} \cdot y_k(x) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_n^{(k)} \cdot y_k(x) \end{aligned}$$

   mit Konstanten $c_j^{(k)}$ für $j, k = 1, ..., n$, so schreiben wir die Gleichung mit Hilfe einer Matrix A, welche aus den Konstanten $c_j^{(k)}$ besteht als

$$y' = A \cdot y,$$

   wobei $y = (y_1, ..., y_n)$ und $y' = (y_1', ..., y'n')$.

2. **Eigenwerte berechnen:**
   Wir berechnen die Eigenwerte λ von A durch das Lösen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

   mit I die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.