Inhalt

II Funktionen 39

III Analysis 79

IV Wahrscheinlichkeit und Statistik 113

1 Tipps für die Matura

1. **Lies genau!**
   Und damit ist wirklich ganz genau lesen gemeint. Vor allem Teil 1 der *Neuen Matura* besteht hauptsächlich aus Beispielen, bei denen du einen Punkt entweder ganz oder gar nicht bekommst – halbe Punkte gibt es hier nicht! Es wäre sehr schade, wenn du wegen eines überlesenen Wortes oder einer falsch verwendeten Einheit diesen Punkt verschenkst.

2. **Autorisierte Beispiele üben!**
   Du solltest bei deiner Maturavorbereitung unbedingt den Fokus auf das Üben von Beispielen des für die Matura zuständigen Institutes legen. Bis zum 1.1.2017 war das BIFIE dafür verantwortlich, jetzt das BMB. Du findest sowohl die alten BIFIE-Beispiele als auch immer wieder neues Übungsmaterial auf der offiziellen Seite des BMB. Die Fragen bei der Matura sind ziemlich gleich aufgebaut und so kannst du dich schon im Voraus mit der Art der Fragestellung vertraut machen.

3. **Elektronische Hilfsmittel kennenlernen!**
   Mach dich rechtzeitig mit den elektronischen Hilfsmitteln vertraut, die du bei der Neuen Reifeprüfung verwenden darfst. Grundsätzlich stehen dir verschiedene Hilfsmittel (Graphische Taschenrechner, GeoGebra etc.) bei der Matura zur Verfügung. Um die Programme aber effizient nutzen zu können, musst du einige Befehle beherrschen. Solltest du damit noch Schwierigkeiten haben, frag bei deinen Lehrern oder Schulkollegen nach. Oft findet man auch hilfreiche Hinweise im Internet oder in der Bedienungsanleitung.

4. **Theorie verstehen!**
   Bei der Neuen Reifeprüfung wird großen Wert auf das Verstehen der zugrundeliegenden Theorien gelegt. Bloßes Auswendiglernen von Beispielen war vielleicht einmal – das geht heute aber gar nicht mehr. Versuche die Lösungswege wirklich nachzuvollziehen und nicht einfach hinzunehmen. Wenn du dir unsicher bist, ob du ein Kapitel wirklich verstanden hast, kannst du versuchen es einer anderen Person zu erklären. Sind deine Erklärungen für dein Gegenüber plausibel, bist du schon auf einem sehr guten Weg!

5. **Antwortmöglichkeiten unterstreichen!**
   Bei den Multiple-Choice-Fragen steht in der Angabe meist *Kreuzen Sie die (beiden) zutreffende(n) Aussage(n) an*. Du wirst diesen Satz bei fast jeder Angabe vorfinden und ihn deshalb wahrscheinlich auch nicht mehr wirklich beachten. Nimm dir aber einen kurzen Moment Zeit, um hervorzuheben wie viele Antwortmöglichkeiten richtig sind (falls überhaupt angegeben). Solltest du dir bei einer Frage unsicher sein, kannst du so einfach nach dem Ausschlussverfahren vorgehen.

Quelle für die Stoffabgrenzung: BIFIE Österreich

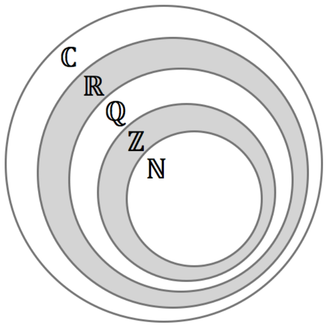
2 Grundbegriffe der Algebra

2.1 Die Zahlenmengen

Zahlenmengen

Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit den folgenden Zahlenmengen:

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$
- rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
  - Darunter versteht man alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen. Das heißt, alle Zahlen, außer nicht periodische oder unendliche Dezimalzahlen (=irrationale Zahlen).
  - Beispiele: $-4/5$; 2,575; 8,4; $-0{,}999\ldots$; $0{,}3434\ldots$; $2/3$



- irrationalen Zahlen $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
  - Wir lesen: *Alle reellen Zahlen außer den rationalen Zahlen*.
  - Sie sind das Gegenteil der rationalen Zahlen, beschreiben also alle Zahlen, die sich nicht als Bruch anschreiben lassen. Das heißt es handelt sich hier um nicht periodische oder unendliche Dezimalzahlen.
  - Beispiele: $\pi = 3{,}14159265\ldots$ oder $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$
- reellen Zahlen $\mathbb{R}$
  - Damit sind alle Zahlen gemeint, mit denen wir normalerweise rechnen können.
- komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
  - Alle Zahlen inklusive der Wurzel negativer Zahlen, zum Beispiel $\sqrt{-2}$ oder $\sqrt{-5{,}41}$ u.s.w.
  - Wir definieren $\sqrt{-1}$ als i, z.B. $2i = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

3 (Un-)Gleichungen und LGS

3.1 Grundlagen

Grundmenge: die Zahlen, die für die Lösung der Gleichung grundsätzlich in Betracht kommen (meistens einfach $\mathbb{R}$).

Definitionsmenge: Grundmenge nach Abzug der Zahlen, die nicht die Lösung sein dürfen, z.B. $\frac{1}{1-x} \Rightarrow x$ darf hier nicht -1 sein, weil ja sonst im Nenner 0 stehen würde. Unsere Grundmenge ist, wenn nicht anders angegeben, ganz $\mathbb{R}$. Für unser Beispiel $\frac{1}{1-x}$ ergibt sich als Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Du erinnerst dich sicher noch an die drei verschiedenen Lösbarkeitsfälle, die beim Lösen von Gleichungen grundsätzlich auftauchen können: eine, keine oder unendlich viele Lösungen. Hast du damit noch Schwierigkeiten, lies noch einmal im vorhergehenden Kapitel 2.2 nach.

Lösen einer Gleichung: man muss auf beiden Seiten einer Gleichung

- den gleichen Term addieren/subtrahieren
- mit dem gleichen Term ($\neq 0$) multiplizieren
- durch den gleichen Term ($\neq 0$) dividieren

Achtung! Bedenke beim Wurzelziehen, dass man sowohl negative als auch positive Lösungen bekommen kann, z.B.

$$x^2 = 16 \quad |\sqrt{} \quad \Rightarrow x_{1,2} = \sqrt{16}$$
$$x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -4$$

Warum ist das so? Weil sowohl 4^2 als auch $(-4)^2$ ergeben die Zahl 16. Wir müssen hier also an beide Lösungsmöglichkeiten denken!

3.2 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen ersten Grades, also Gleichungen in denen nur eine Variable in keiner höheren als der ersten Potenz vorkommt.

> Die allgemeine Form der linearen Gleichungen lautet
>
> $$ax + b = c,$$
>
> wobei a und b reelle Zahlen sind und $a \neq 0$ gilt.

Bei einem linearen Gleichungssystem kommt mehr als eine Variable vor, das behandeln wir aber in Kapitel 3.5.

Aufgaben

Lösungen

3.2.1 Herr Bauer produziert Glühbirnen. Seine Fixkosten betragen monatlich 1000 Euro und jede Glühbirne kostet ihn 1,20 Euro an Material. Stelle eine Gleichung auf, die den Zusammenhang an jährlichen Kosten (K) und der Anzahl an produzierten Glühbirnen (x) aufzeigt.

3.2.2 In anderen Ländern werden Längeneinheiten in Zoll und nicht wie bei uns in cm angegeben. Ein Zoll entspricht dabei 2,54 cm. Gib eine Formel an, die die Umrechnung von cm (c) in Zoll (z) ermöglicht. Berechne, wie viele cm 5 Zoll sind.

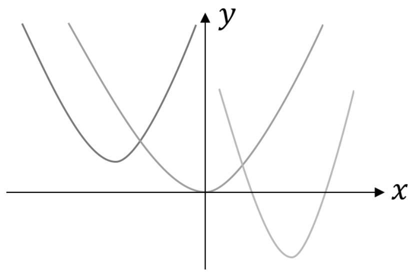
3.3 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichung lösen

In quadratischen Gleichungen können eine oder mehrere Variablen eine zweite Potenz besitzen.

Die allgemeine Form lautet:

$$ax^2 + bx + c = d$$



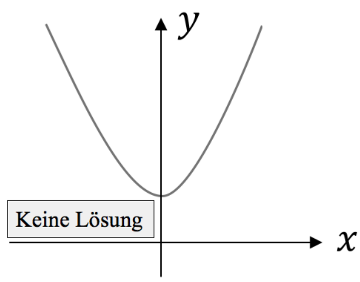
Eine quadratische Gleichung, die du sicher kennst, ist die pq-Formel: $x^2 + px + q = 0$. Quadratische Gleichungen werden graphisch als Parabeln dargestellt.

Es gibt ähnlich wie bei den linearen Gleichungen auch für quadratische Gleichungen drei Lösungsmöglichkeiten:

keine Lösung: Das ist der Fall, wenn z.B. eine negative Zahl unter der Wurzel steht. Das können wir in $\mathbb{R}$ nämlich nicht lösen. Beispiel: $x^2 = -2 \Rightarrow$ der nächste Schritt wäre das Wurzelziehen, dann stünde aber $x = \sqrt{-2}$ da, wofür es in $\mathbb{R}$ keine Lösung gibt.

Mithilfe der pq–Formel folgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
\Rightarrow\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\Rightarrow\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 &- q < 0
\end{aligned}
$$



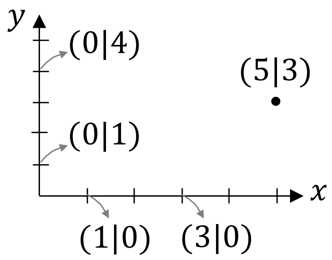
4 Vektoren

4.1 Punkte im Koordinatensystem ablesen

Zu einem beliebigen Punkt im dreidimensionalen Raum $(x_1|x_2|x_3)$ bzw. $(x|y|z)$, z.B. $P(6|7|4)$, gelangt man, indem man vom Nullpunkt des Koordinatensystems 6 Einheiten in x-Richtung, 7 Einheiten in y-Richtung und dann 4 Einheiten in z-Richtung geht. Hier noch besondere Punkte:

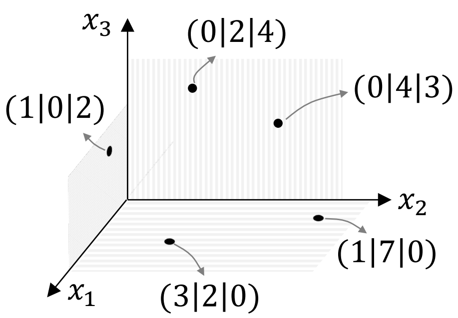
Punkte in 2D

Punkte in 3D



<u>2-Dimensional</u>:

- Alle Punkte auf der y-Achse haben den x-Wert 0! $P(0|y)$
- Alle Punkte auf der x-Achse haben den y-Wert 0! $P(x|0)$



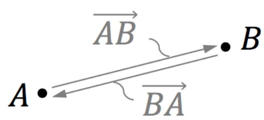
<u>3-Dimensional</u>:

- Alle Punkte in der x_1x_2-Ebene haben den x_3-Wert 0! $P(x_1|x_2|0)$
- Alle Punkte in der x_1x_3-Ebene haben den x_2-Wert 0! $P(x_1|0|x_3)$
- Alle Punkte in der x_2x_3-Ebene haben den x_1-Wert 0! $P(0|x_2|x_3)$

4.2 Vom Punkt zum Vektor

Ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet eine Verschiebung in der Ebene oder im Raum. Aus zwei Punkten im 3-dimensionalem Raum $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man den Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



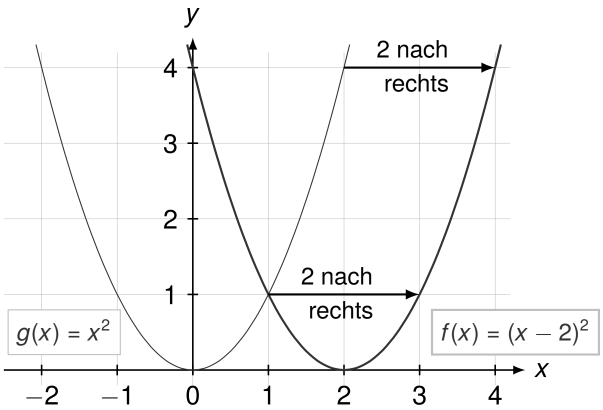
Grafisch wird der Vektor durch einen Pfeil dargestellt, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung und ist genauso lang wie $\overrightarrow{AB}$.

Manipulation bei quadratischen Funktionen

Verschiebung in x-Richtung

Die Verschiebung in x-Richtung können wir in unserer Funktionsgleichung wie folgt berücksichtigen.

Dazu werfen wir einen Blick auf das nebenstehende Koordinatensystem. Der Scheitelpunkt dieser Parabel und alle anderen Punkte wurden ausgehend von der Normalparabel (hier: $g(x) = x^2$) um 2 Einheiten nach rechts verschoben.



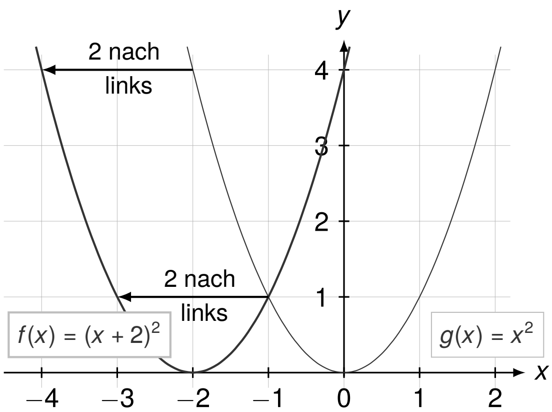
Wenn wir einen Blick auf die Funktionsgleichung werfen, sehen wir, dass sie wie folgt lautet:

$$f(x) = (x-2)^2$$

Eine Verschiebung in x-Richtung kann man immer daran erkennen, dass der Wert, um welchen die Parabel verschoben wurde, mit umgekehrten Vorzeichen in der Klammer auftaucht.

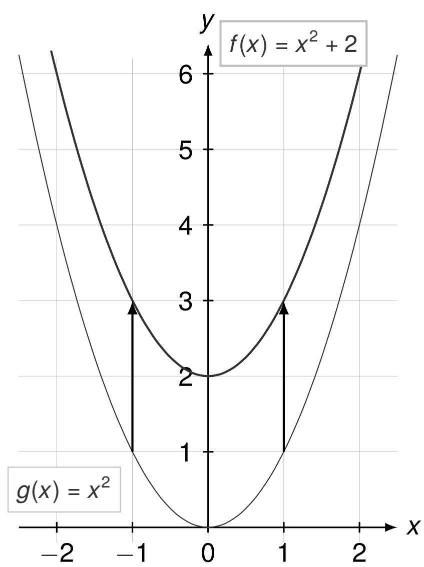
Dazu wollen wir uns ebenfalls eine Parabel angucken, welche nach links verschoben wurde. Die Funktionsgleichung dieser Parabel lautet:

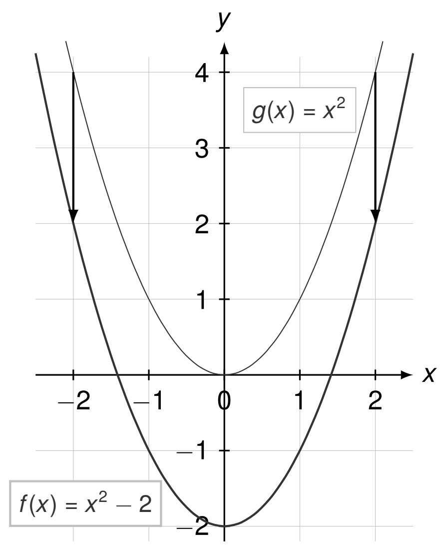
$$f(x) = (x+2)^2$$



Die Parabel wurde um 2 Einheiten nach links verschoben. Das erkennen wir daran, dass die -2 in unserer Gleichung innerhalb der Klammer mit einem umgekehrten Vorzeichen auftaucht.

Verschiebung in y-Richtung



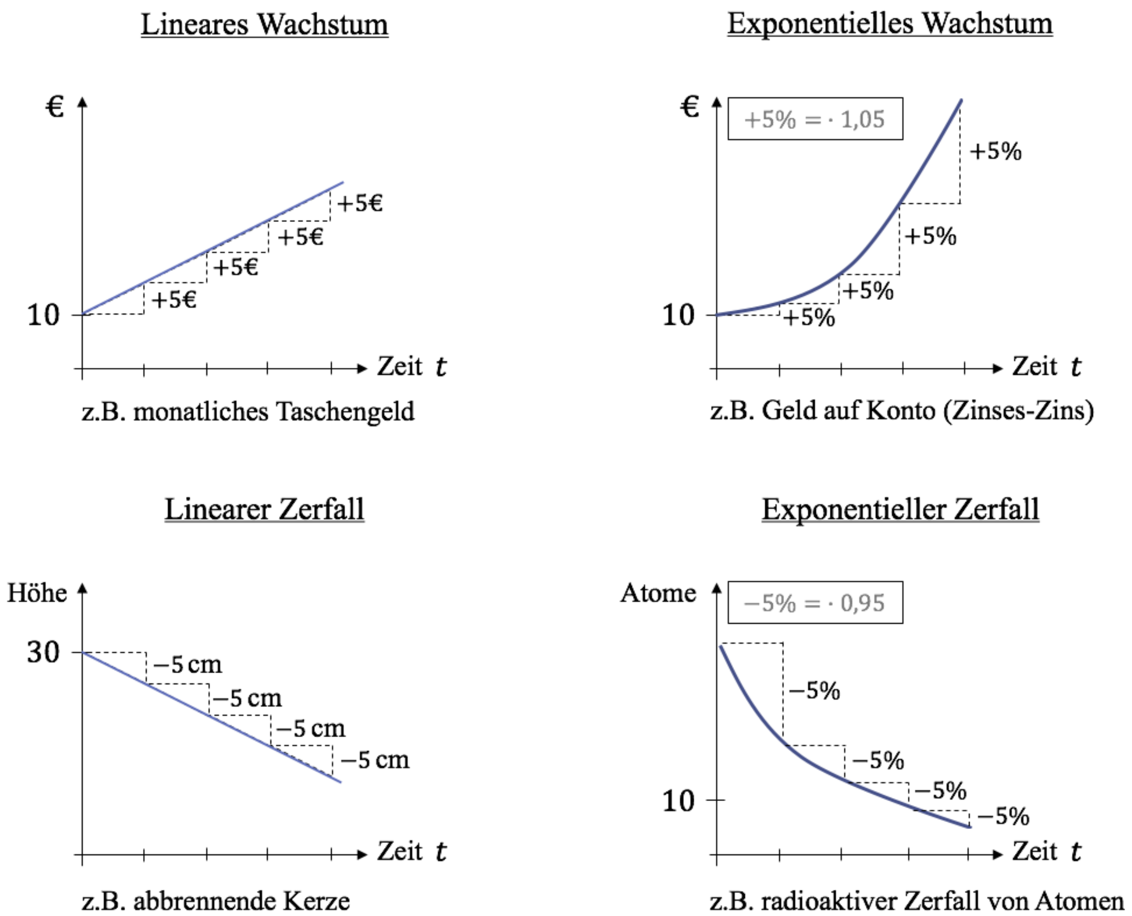


- 200 Fliegen werden täglich 5 % weniger. Allgemein: $N(t) = N(0) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$

$$N(t) = 200 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t = 200 \cdot 0{,}95^t$$

Die nachfolgende Abbildung soll euch als Übersicht zum Thema Wachstumsprozesse dienen. Hier sind lineare und exponentielle Prozesse gegenübergestellt, so dass die Unterschiede deutlich werden können.

Unterschiede



Wichtig Bei der Exponentialfunktion ist die relative, also prozentuelle Steigung konstant. Das bedeutet der prozentuelle (=relative) Zuwachs bzw. die prozentuelle Abnahme der Exponentialfunktion bleibt immer gleich. Die Werte steigen aber nicht um denselben konstanten Betrag wie bei der linearen Funktion. Im Gegensatz dazu steigt die lineare Funktion immer um denselben absoluten Betrag k, ihre prozentuelle Steigung ändert sich aber. Wir merken uns:

Lineare Funktion:	Steigung k konstant
Exponentialfunktion:	relative Steigung, b in Abhängigkeit von a konstant

Typisch für exponentielles Wachstum ist die *Verdopplungszeit bzw. Generationszeit*, wo gefragt wird, wann der doppelte Startwert (oder Anfangsbestand) erreicht wird und die *Halbwertszeit* (bei exponentieller Abnahme), wo gefragt wird, wann der halbe Startwert (oder Anfangsbestand) erreicht wird. Da bei der Verdopplungszeit immer nach dem doppelten Startwert ($2 \cdot S$) mit S als

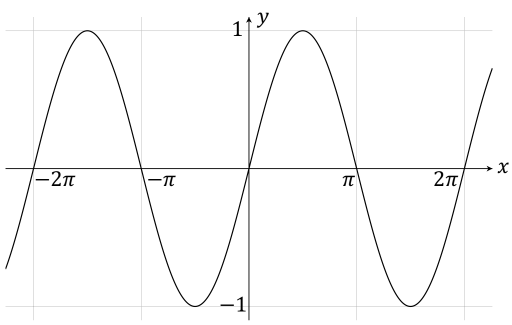
12 Trigonometrische Funktionen

12.1 Grundlagen

Sinusfunktion

Wichtige Eigenschaften der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$:

- periodische Funktion mit Periode 2π, d.h. dass der Graph der Sinusfunktion sich nach jeder Periode wiederholt.
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1,1]$
- schneidet die y-Achse bei $(0|0)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung



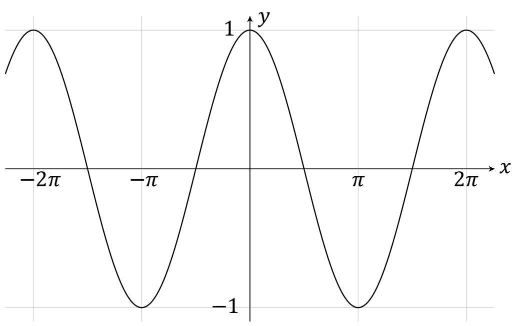
Die allgemeine Sinusfunktion lautet: $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$

Grundlagen
sin und cos

Cosinusfunktion

Wichtige Eigenschaften der Cosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$:

- periodische Funktion mit Periode 2π, d.h. dass der Graph der Cosinusfunktion sich nach jeder Periode wiederholt.
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1,1]$
- schneidet die y-Achse bei $(0|1)$
- achsensymmetrisch zur y-Achse



Die allgemeine Cosinusfunktion lautet: $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$

Aufgaben

17.1 Bestimme folgende Integrale.

a) $\int_0^2 x^2 + 2x - 3\,dx$

b) $\int_{-1}^1 x^3\,dx$

c) $\int_0^1 e^x\,dx$

d) $\int_{-1}^2 e^{2x} + x\,dx$

Lösungen

17.2 Der Querschnitt eines Flusses kann durch die Funktion $f(x) = 0{,}25x^2$ beschrieben werden.

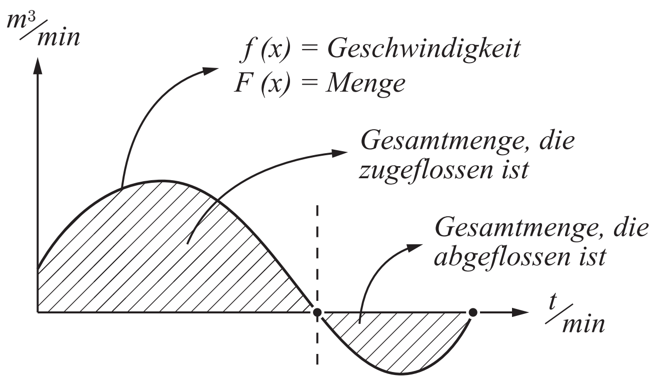
a) Wie tief ist er an seiner tiefsten Stelle, wenn er maximal 4 m breit ist? Mach eine Skizze.

b) Berechne die Querschnittsfläche des Kanals.

17.6 Interpretation im Sachzusammenhang

Mit der Interpretation haben Schüler oft Schwierigkeiten, wenn im Graphen Geschwindigkeiten etc. gegeben sind, anstatt einer Menge. Schaut also zunächst auf die Achsen, welche Einheiten gegeben sind und lest den Aufgabentext genau durch.

Flächen im Sach-zusammenhang



In diesem Fall beschreibt $f(x)$ die Zuflussgeschwindigkeit pro Minute. Dann fließt das Wasser

- bis zur Nullstelle zu, da der Graph dort im Positiven liegt.
- ab der Nullstelle ab, da der Graph im Negativen liegt.

17.7 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Häufig ist eine Funktion gegeben, die den Wasserstand angibt oder die Geschwindigkeit des Wasserzuflusses! Wenn dann zum Beispiel nach der durchschnittlichen Höhe des Wasserstandes in einem bestimmten Zeitraum gefragt ist, bedient man sich oft am *Mittelwertsatz* der Integralrechnung:

Mittelwertsatz

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}[F(x)]_a^b = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$$