Inhalt

Vorwort

Diese 182 Seiten starke Aufgabensammlung ist die ideale Ergänzung zu unserem Lernheft „Mathe 2 für Ingenieure“. Bei dem Lernheft steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik“ kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln anstatt sie mit Faszination zu entdecken.

Die Aufgabensammlung hingegen festigt das erlernte Wissen aus dem Lernheft. Zu jedem Kapitel gibt es zahlreiche Aufgaben und im Anhang findest du sehr ausführliche Lösungen. Solltest du bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, kannst du einfach nochmal im Lernheft die Theorie durchgehen und kannst dann hoffentlich die Aufgabe eigenständig lösen. Wenn nicht, hilft immer noch der Blick in die Musterlösungen.

Die Übungsaufgaben (insgesamt 95 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst, sind in folgenden Schwierigkeitsstufen zu finden:

Level: Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 12 Aufgaben.**

Level: Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 46 Aufgaben.**

Level: Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 26 Aufgaben.**

Level: Master-Übungen, die zum Teil über das verlangte Wissen hinausragen. Es wird von dir abstraktes Denken und allumfassendes Wissen abverlangt. Es ist nicht schlimm, wenn du viele dieser Aufgaben nicht lösen kannst. Falls du es dennoch schaffst, brauchst du vor deiner Prüfung keinerlei Angst mehr zu haben. **Insgesamt 11 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung.

Sollte sich doch mal ein Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an der Aufgabensammlung. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der Mathematik 2 Veranstaltung.

Feedback

Danke an Dr. Wilhelm Appelt für die mathematische Unterstützung!

— Lisa-Maria Böck

1 Lineare Algebra

1.1 Matrizen

A.1.1 (Level:) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

Lösungen ab S. 27

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Transponierte zu jeder Matrix.

b) Bei welchen Matrizen kann die Spur berechnet werden? Berechne diese!

c) Berechne alle möglichen Produkte zweier Matrizen.

A.1.2 (Level:) Berechne die Terme für die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - 2 \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

b) $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}$

c) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$

A.1.3 (Level:) Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ reelle 2×2-Matrizen sowie $\mathbf{0}$ die 2×2-Nullmatrix. Zeige oder widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels folgende Aussagen:

a) $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ symmetrisch $\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ symmetrisch

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

d) $\operatorname{Spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{Spur}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$

2.2 Differentiation, Ableitungen

Lösungen ab S. 96

A.2.4 (Level:) Bestimme den Gradienten der folgenden Skalarfelder f:

a) $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ b) $f(x, y) = x^2y^3 + xy^2 + 2y$ c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

d) $f(x, y) = e^{xy^3}$ e) $f(x, y, z) = e^{x-y}\cos(5z)$ f) $f(x, y, z) = \ln(xy^2z^3)$

A.2.5 (Level:) Bestimme den Gradienten der folgenden Skalarfelder f:

a) $f(x, y) = xy^2(\sin(x)+\sin(y))$ b) $f(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(xy)$ c) $f(x, y) = -\dfrac{y - (x - 1))}{xy}$

A.2.6 (Level:) Bestimme den Gradienten der folgenden Skalarfelder f:

a) $f(x, y, z) = x^{yz}$ b) $f(x, y, z) = xe^{y\,\sinh(xz)}$ c) $f(x, y, z) = \ln\left(\dfrac{y\sqrt{z}}{\arctan(x)}\right)$

A.2.7 (Level:) Bestimme die Hesse-Matrix der folgenden Skalarfelder f:

a) $f(x, y) = 3x^4 - x^2y + 5xy^3$ b) $f(x, y) = xye^{xy}$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ d) $f(x, y) = (5y - x^2)\ln(y) + 3xe^{-y^2}$

A.2.8 (Level:) Bestimme die Richtungsableitung der folgenden Skalarfelder f in Richtung des angegebenen Vektors $\vec{v}$:

a) $f(x, y) = x^2 + 3xy \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $f(x, y, z) = xyz + 3xz^3 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

A.2.9 (Level:) Bestimme die Jacobi-Matrix und – sofern möglich – die Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder f:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x - y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$ d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z\sin(x) \\ z^2 + z\sin(y) \end{pmatrix}$

A.2.10 (Level:) Bestimme die Jacobi-Matrix und – sofern möglich – die Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder f:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)x \\ (x^2 + y^2 - 1)y \end{pmatrix}$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + \sin(y) \\ e^y + 3 \\ 2x^4y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\sin(y)\cos(z) \\ x\sin(y)\sin(z) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$ d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4y \\ 3x^2 - 2\sin(yz) \\ 2yz \end{pmatrix}$

3 Differentialgleichungen (DGL)

3.1 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

A.3.1 (Level:) Bestimme jeweils alle Funktionen y, die die folgende Differentialgleichung (DGL) erfüllen:

Lösungen ab S. 138

a) $y' - 4y = 0$ b) $y'' - 9y = 0$ c) $y' - y = 2$

d) $y'' - y = x^2$ e) $y'' - 5y' + 6y = 0$ f) $y'' - 3y' - 10y = -3$

A.3.2 (Level:) Bestimme jeweils alle Funktionen y, die die folgende DGL erfüllen:

a) $y'' - 2y' + y = 0$ b) $y'' + 25y = 0$ c) $y'' - 2y' + 5y = 0$

d) $y'' + 2y' + 2y = -4x^2 - 2$ e) $y'' - 7y' + 12y = e^{-x}$ f) $y'' + 4y' + 3y = 10\cos(x)$

A.3.3 (Level:) Bestimme jeweils die Funktion y, welche das folgende Anfangswertproblem löst:

a) $y' = 0, \quad y(0) = 3$ b) $y'' + y' = x, \quad y(0) = 3, y'(0) = -1$

c) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$ d) $2y'' + 10y' + 12y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$

e) $y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0$ f) $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$

A.3.4 (Level:) Bestimme jeweils alle Funktionen y, die die folgende DGL erfüllen:

a) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$ b) $y'' + y' - 6y = \cos(x)$ c) $y''' - 3y'' + y' - 3y = 17e^{4x}$

d) $y'''' + 2y''' - 8y'' = e^x$ e) $y'' + 2y' + 5y = 10e^{-2x}$

A.3.5 (Level:) Bestimme die Lösung(en) folgender Anfangswertprobleme:

a) $y'' + 4y = \sin(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0$

b) $y'' - 2ay' + a^2y = 2e^{ax}$, mit $a \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 1$

c) $y'''' - 16y = 0, \quad y(0) = 0$

d) $y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 26x + 15, \quad y(0) = y'(0) = 0$

A.3.6 (Level:) Gebe alle Funktionen y mit $y(0) = 1$ an, die spiegelsymmetrisch zur y-Achse sind und für die $y''(x) = y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

A Lösungen

A.1 zu Lineare Algebra

A.1.1

a) Um die transponierte Matrix zu bestimmen, müssen wir Zeilen und Spalten der Matrix vertauschen (die Matrix muss dazu nicht quadratisch sein). Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Spur kann nur bei quadratischen Matrizen ($n \times n$) berechnet werden, also nur für die Matrix **D** und es gilt: Spur$(\mathbf{D}) = 1 + 1 = 2$

c) Damit eine Matrixmultiplikation möglich ist, muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Da $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4x3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2x4}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3x2}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2x2}$ sind folgende Produkte möglich: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$ und es gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 0 \\ 6 & 15 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -26 & 9 & -9 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 14 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

A.1.2

a) Wir berechnen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - 2 \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 4 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -8 & 2 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Probe für den Punkt Q:

$$Q_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{15}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir haben also richtig gerechnet.

A.1.28

a) Um die Linearität von f_1 nachzuweisen, müssen wir folgende zwei Bedingungen zeigen:

1. $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^3$
2. $f_1(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_1(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $*^1$

- Sei $x = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ und $y = (y_1, y_2, y_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1+y_1) - (x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) \\ &= x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + 2x_3 + 2y_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 - y_2 + 2y_3 \\ &= f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) + f_1\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_1\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}\right) = (\lambda x_1) - (\lambda x_2) + 2(\lambda x_3) = \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3) \\ &= \lambda \cdot f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_1$ ist linear. $*^2$

> $*^1$ Diese zwei Bedingungen können auch in einem Zug gezeigt werden:
> $f_1(\lambda x + \mu y) = \lambda f_1(x) + \mu f_1(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
>
> $*^2$ Man sagt auch f_1 ist $\mathbb{R}$-linear.

b) f_2 ist nicht linear, da Folgendes gilt:
Sei $\lambda = 2$ und $x = (1, 1)^\mathsf{T}$:

$$f_2\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$

$$2 \cdot f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot (5 \cdot 1 \cdot 1) = 10$$

$$\Rightarrow f_2\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq 2 \cdot f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

A.2.17

a) Partielle Ableitungen, Gradient und Hesse-Matrix:

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y = 4y^3, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}^T \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge 4y^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ ist einziger kritischer Punkt.
Kritischen Punkt in Hesse-Matrix einsetzen:

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da ein Eigenwert Null ist, ist die Matrix semidefinit und wir können somit mit Hilfe der Hesse-Matrix keine Aussage über den Typ des kritischen Punktes treffen. Es gilt jedoch:

$$f(0,0) = 0^2 + 0^4 = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 + 0 = 0 \, \forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Die Funktion besitzt an der Stelle $(0,0)$ den Wert 0, ist allerdings für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ größer/gleich Null. Damit muss f im kritischen Punkt $(0,0)$ ein lokales (sogar globales) Minimum besitzen.

b) Partielle Ableitungen, Gradient und Hesse-Matrix:

$$f_x(x,y) = -2x, \quad f_y = -4y^3, \quad f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -12y^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}^T \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Leftrightarrow -2x = 0 \wedge -4y^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ ist einziger kritischer Punkt.
Kritischen Punkt in Hesse-Matrix einsetzen:

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ein Eigenwert ist Null
$\Rightarrow$ $\mathbf{H}_f(0,0)$ ist semidefinit.
$\Rightarrow$ keine Aussage.

Es gilt jedoch:

$$f(0,0) = 0^2 + 0^4 = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = -x^2 - y^4 = -(x^2 + y^4) \leq 0 \, \forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Damit besitzt f in $(0,0)$ ein lokales (sogar globales) Maximum.

Zunächst folgt $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$. Aus der Gleichung $e^a(C_1 + C_2 + 1) = 1$ können wir damit $e^a = 1$ folgern und daher gilt $a = \ln(1) = 0$
Folgende Funktion löst das Anfangswertproblem:

$$y_{spez} = 0e^{0x} + 0xe^{0x} + e^{0x}x^2 = x^2$$

c)
- Allgemeine Lösung:
  Gegebene Differentialgleichung: $y'''' - 16y = 0$
  Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

  $$\lambda^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$$

  Damit erhalten wir die zwei reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$, sowie die komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 0 + 2i$ und $\overline{\lambda}_3 = 0 - 2i$
  Fundamentalsystem:

  $$FS = \left\{e^{2x}, e^{-2x}, e^{0x}\cos(2x), e^{0x}\sin(2x)\right\}$$

  Allgemeine Lösung: $y_{allg} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x),\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
- Anfangswerte einsetzen:
  Da wir nur einen Anfangswert gegeben haben, jedoch vier Unbekannte, können wir lediglich eine Unbekannte durch die Anderen ausdrücken:

  $$y(0) = C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{-2\cdot 0} + C_3\cos(2\cdot 0) + C_4\sin(2\cdot 0) = C_1 + C_2 + C_3 \stackrel{!}{=} 0$$

  Damit folgt: $C_3 = -(C_1 + C_2)$
  Folgende Funktionen lösen nun das Anfangswertproblem:

  $$y_{spez} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - (C_1 + C_2)\cos(2x) + C_4\sin(2x), \quad C_1, C_2, C_4 \in \mathbb{R}$$

d)
- Zugehörige homogene Gleichung lösen: $y'' - 5y' + 6y = 0$
  Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

  $$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$
  $$\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ oder } \lambda = 2$$

  Fundamentalsystem: $FS = \{e^{3x}, e^{2x}\}$
  Homogene Lösung: $y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- Spezielle Lösung bestimmen:
  Störglied: $12x^2 - 26x + 15 = (15 - 26x + 12x^2 + 0x^3 + ...)\cdot e^{0x}$
  Störgliedansatz: $y_p := (A_0 + A_1x + A_2x^2)\cdot e^{0x}\cdot x^0 = A_0 + A_1x + A_2x^2$
  Ableitungen:

  $$y_p' = A_1 + 2A_2x, \quad y_p'' = 2A_2$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung $y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 26x + 15$:

  $$\begin{aligned}\Rightarrow\ & (2A_2) - 5(A_1 + 2A_2x) + 6(A_0 + A_1x + A_2x^2)\\ &= 2A_2 - 5A_1 - 10A_2x + 6A_0 + 6A_1x + 6A_2x^2\\ &= (2A_2 - 5A_1 + 6A_0) + (-10A_2 + 6A_1)x + (6A_2)x^2 \stackrel{!}{=} 15 - 26x + 12x^2\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2A_2 - 5A_1 + 6A_0 &= 15 \quad &(\mathrm{I}) \\ -10A_2 + 6A_1 &= -26 \quad &(\mathrm{II}) \\ 6A_2 &= 12 \quad &(\mathrm{III}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow} & A_2 &= 2 \\ &\overset{\text{in (II)}}{\Rightarrow} & -10 \cdot 2 + 6A_1 &= -26 \Rightarrow -20 + 6A_1 = -26 \Rightarrow 6A_1 = -6 \Rightarrow A_1 = -1 \\ &\overset{\text{in (I)}}{\Rightarrow} & 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) + 6A_0 &= 15 \Rightarrow 6A_0 = 6 \Rightarrow A_0 = 1 \\ &\Rightarrow & y_p &= 1 - x + 2x^2 \end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung: $y_{allg} = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 1 - x + 2x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- Anfangswerte einsetzen:
  Ableitung:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x} - 1 + 4x$$

Unbekannte C_1, C_2 bestimmen:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0} + 1 - 0 + 2 \cdot 0^2 = C_1 + C_2 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad (\mathrm{I}) \\ y'(0) &= 3C_1 e^{3\cdot 0} + 2C_2 e^{2\cdot 0} - 1 + 4 \cdot 0 \quad = 3C_1 + 2C_2 - 1 \overset{!}{=} 0 \quad (\mathrm{II}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} & C_1 &= -1 - C_2 \\ &\overset{\text{in (II)}}{\Rightarrow} & 3(-1 - C_2) + 2C_2 - 1 &= 0 \qquad \Rightarrow C_2 = -4 \\ &\Rightarrow & C_1 = -1 - C_2 &= -1 - (-4) = 3 \end{aligned}$$

Folgende Funktion löst das Anfangswertproblem:

$$y_{spez} = 3e^{3x} - 4e^{2x} + 1 - x + 2x^2$$

A.3.6 Die Gleichung $y''(x) = y(x)$ ist äquivalent zur Gleichung $y'' - y = 0$.

- Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung.
  Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1$$

  Fundamentalsystem: $\mathrm{FS} = \{e^{1x}, e^{-1x}\}$
  Allgemeine Lösung: $y_{allg} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- Als nächstes verwenden wir die Bedingung $y(0) = 1$:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 \overset{!}{=} 1$$

  Wir erhalten damit die Gleichung $C_1 + C_2 = 1$.

- Allgemeine Lösung: $z_{allg} = z_h + z_p = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$
- Rücksubstituieren. Es gilt: $z = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3}, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

- Anfangswert einsetzen:

$$y(0) = \frac{1}{C \cdot \mathrm{e}^0 + 3} = \frac{1}{C+3} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow C + 3 = 2 \Rightarrow C = -1$$
$$y_{spez} = \frac{1}{-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3}$$

A.3.17 Wir füllen die Tabelle aus.

	DGL	Ordnung	linear?	homogen?	konst. Koef.?
1.)	$y' = x^2 + 4x - 3$	1	✓	✗	✓
2.)	$y'y^3 = \mathrm{e}^x$	1	✗	—	—
3.)	$y'' - 2y' + 5y = 0$	2	✓	✓	✓
4.)	$y' = \sin(y)$	1	✗	—	—
5.)	$yx^3 = 2y' - 5$	1	✓	✗	✗
6.)	$3y'''' + 2y''' - 8y'' = \mathrm{e}^x$	4	✓	✗	✓
7.)	$3y' = \frac{2\mathrm{e}^{-y}}{x^2+2x}$	1	✗		
8.)	$y'' + y - 2\cos(x) + 2\sin(x) = 0$	2	✓	✗	✓
9.)	$3y' + y = y^{-2}$	1	✗	—	—
10.)	$y' = y\cos(x) \cdot \ln(y)$	1	✗	—	—
11.)	$y = 4x^2y' + 3xy''$	2	✓	✓	✗
12.)	$2y'' + 4y' + 4y = -8x^2 - 4$	2	✓	✗	✓
13.)	$(x^2 - 1)y' = 3 - 2y$	1	✓	✗	✗
14.)	$xy'' - y = x\exp^x$	2	✓	✗	✗
15.)	$x^4y' = 3 - 2y$	1	✓	✗	✗
16.)	$y' + 2xy = 2xy^2$	1	✗	—	—
17.)	$y + 2y' + 3xy'' = 2x^2$	2	✓	✗	✗
18.)	$\frac{y'}{\sin^3(x)} = y\cos(x)\ln(y)$	1	✗	—	—

A.3.18

a) Gegebene Gleichung: $y'' - y' - 2y = 0$
Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen diese mit dem Euler-Ansatz. Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = -1$$