Inhalt

Vorwort

Diese 187 Seiten starke Aufgabensammlung ist die ideale Ergänzung zu unserem Lernheft „Mathe 1 für Ingenieure“. Bei dem Lernheft steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik“ kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln anstatt sie mit Faszination zu entdecken.

Die Aufgabensammlung hingegen festigt das erlernte Wissen aus dem Lernheft. Zu jedem Kapitel gibt es zahlreiche Aufgaben und im Anhang findest du sehr ausführliche Lösungen. Solltest du bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, kannst du einfach nochmal im Lernheft die Theorie durchgehen und kannst dann hoffentlich die Aufgabe eigenständig lösen. Wenn nicht, hilft immer noch der Blick in die Musterlösungen.

Die Übungsaufgaben (insgesamt 197 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst, sind in folgenden Schwierigkeitsstufen zu finden:

Level: Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 106 Aufgaben.**

Level: Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 71 Aufgaben.**

Level: Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 18 Aufgaben.**

Level: Master-Übungen, die zum Teil über das verlangte Wissen hinausragen. Es wird von dir abstraktes Denken und allumfassendes Wissen abverlangt. Es ist nicht schlimm, wenn du viele dieser Aufgaben nicht lösen kannst. Falls du es dennoch schaffst, brauchst du vor deiner Prüfung keinerlei Angst mehr zu haben. **Insgesamt 2 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung.

Sollte sich doch mal ein Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an der Aufgabensammlung. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der Mathematik 1 Veranstaltung.

Feedback

— Dr. Anna Barát

1 Mathematischer Werkzeugkoffer

In dem Lernheft *Mathematik für Ingenieure 1* hast du in dem gleichnamigen Kapitel sehr viele Begriffe, Techniken und Vorgehensweisen gelernt. Sich die Inhalte deiner Veranstaltung auf diese Weise zu strukturieren und zu merken sowie auf Anwendungsgebiete angewendet zu haben, sollte den gesamten Inhalt enorm vereinfacht haben. Um deinen im Kopf angelegten **mathematischen Werkzeugkoffer** aufzufrischen und die Themen zu vertiefen, findest du in diesem Kapitel Aufgaben, wo du das Erlernte anwenden kannst. Dieses Kapitel soll dir also eine kleine Hilfe sein, den Blick auf das „große Ganze" zu bewahren. Denn es geht immer um folgendes:

Das Ziel ist es, Gelerntes zu abstrahieren und auf alle möglichen Gebiete (auch themenübergreifend) anwenden zu können! *Strukturen/Muster*, die einem bekannt vorkommen, in Aufgabenstellungen erkennen und so Lösungsansätze finden!

1.1 Zu beherrschende Techniken

In dieser Rubrik befinden sich die Aufgaben zu Rechentechniken/-gesetze, zu Techniken zum Auftrennen von Polynomen und Brüchen, zu Verfahren zum Auflösen von (Un-)Gleichungen und anderen. Alles, was in den sonstigen Kapiteln ausführlich beschrieben ist, wird hier nur zusammenfassend erwähnt, damit du einen Überblick hast!

1.1.1 Rechengesetze

Ganz bewusst ordnen wir die Rechengesetze nicht den Formeln zu. Sie müssen nämlich angewendet werden und das intuitive Anwenden zählt eher zu einer Fähigkeit, die du besitzen solltest.

A.1.1 (Level:) Berechne mithilfe der Potenzgesetze (ohne Taschenrechner)! Lösungen ab S. 73

a) $2^5 \cdot 2^3$ b) $(2^3)^4$ c) 5^{-3} d) $5^3 \cdot 2^3$

A.1.2 (Level:) Berechne mithilfe der Potenzgesetze (ohne Taschenrechner)!

a) $a^5 \cdot a^3$ b) $(b^x)^y$ c) x^{-3} d) $x^n \cdot y^n \cdot z^n$

A.1.3 (Level:) Berechne mithilfe der Wurzelgesetze (ohne Taschenrechner)!

a) $\sqrt{2^8}$ b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{2}}$

2.4.2 Schnittwinkel Gerade–Ebene

Hier bedienen wir uns dem Normalenvektor der Ebene E. Wird dieser als RV einer (Hilfs-)Geraden g_h interpretiert, so schneiden sich die Geraden g und g_h in einem Winkel φ_h. Der ursprünglich gesuchte Winkel zwischen E und g ergibt sich nun mit $\varphi_S = \frac{\pi}{2} - \varphi_h$.

1. Normalenvektor der Ebene bestimmen
2. Mit dem RV der Geraden und dem NV der Ebene wie bei Gerade–Gerade vorgehen, allerdings arccos(...) durch arcsin(...) ersetzen
3. Der Winkel φ_S entspricht dem Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

A.2.39 (Level: ◆◆) Berechne den Schnittwinkel der folgenden Geraden und Ebenen.

Lösungen ab S. 121

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}$

b) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}$

2.4.3 Schnittwinkel Ebene–Ebene

Beim Berechnen des Schnittwinkels zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 bedienen wir uns der Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ der Ebenen. Werden die n-Vektoren nun als RV's von (Hilfs-)Geraden g_{h1} und g_{h2} interpretiert, so haben diese Geraden denselben Schnittwinkel (φ_h) wie die Ebenen (φ_S).

1. Jeweils die Normalenvektoren der Ebenen bestimmen
2. Dann mit dem Vorgehen genau wie bei Gerade–Gerade weitermachen
3. Der Winkel φ_h entspricht dem Schnittwinkel zwischen den Ebenen (φ_S)

A.2.40 (Level: ◆◆) Berechne den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

Lösungen ab S. 122

a) $E_1 : \ 3x - 4y + z = 1, \quad E_2 : \ 5x + 2y - 3z = 6$

b) $E_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad E_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$

5 Reihen

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist der Grenzwert der Partialsummen (s_n) einer Folge (hier $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$) (...also die Aufsummierung aller Folgenglieder von a_k).

$$\text{Erste Partialsumme:}\quad s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

$$N\text{-te Partialsumme:}\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die (unendliche) Reihe, k wird Laufindex genannt.

A.5.1 (Level:) Gib die erste, zweite und die N-te Partialsumme an. Lösungen ab S. 147

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3!}{5n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{2^{-n}}{4^{-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3!}{2n!}$

5.1 Allgemeines

Im Allgemeinen geht es bei Reihen meistens darum, (absolute) Konvergenz (ein Grenzwert existiert) oder Divergenz nachzuweisen. Nur bei speziellen Reihen lässt sich auch ein Grenzwert berechnen (siehe Abschnitt 5.2 und 5.3).

A.5.2 (Level:) Korrigiere die folgenden Aussagen so, dass eine wahre Aussage über Reihen entsteht. Lösungen ab S. 148

a) $\sum_{k}^{\infty} a_k$ divergiert $\Rightarrow$ Konvergenz

b) $\left|\sum_{k}^{\infty} a_k\right|$ konvergiert $\Rightarrow$ absolute Konvergenz

c) $\sum_{k}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k}^{\infty} |a_k|$ konvergent

d) $\sum_{k}^{\infty} |a_k| \leq \left|\sum_{k}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k}^{\infty} a_k$

5.1.1 Rechenregeln

A.5.3 (Level:) Überprüfe, ob die folgende Aussagen wahr sind, wenn nicht korrigiere/ergänze sie so, dass eine wahre Aussage über Reihen vorliegt.

Monotonie

A.6.3 (Level:) Untersuche das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $a(x) = x^{2021}$

b) $b(x) = \frac{1}{x}$

c) Bestimme den Bereich, wo $c(x) = \ln(x)$ streng monoton steigend ist!

d) $d(x) = -2021x^{2022}$

Injektivität und Surjektivität

A.6.4 (Level:) Untersuche die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität auf dem maximalen Definitionsbereich.

a) $a(x) = x^{2021}$

b) $b(x) = \frac{1}{x}$, mit $D_b = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W_b = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $c(x) = \ln(x)$

d) $d(x) = -2021x^{2022}$

Bijektivität und Umkehrfunktion

A.6.5 (Level:) Untersuche die folgenden Funktionen auf Bijektivität und gib, wenn möglich, die Umkehrfunktion an.

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a(x) = x^{2021}$

b) $b : (0, \infty) \to (-\infty, 0),\ b(x) = -2021x^{2022}$

6.2 Grundlegende Funktionstypen

Für den gesamten Inhalt dieser Aufgabensammlung und natürlich deiner jeweiligen Veranstaltung ist es zwingend notwendig, dass du die Struktur der grundlegenden Funktionstypen kennst, wiedererkennen kannst und weißt, was diese für Charakteristiken haben.

Lösungen ab S. 159

A.6.6 (Level:) Gib den Term eines Polynoms an, die folgende Bedingungen erfüllt.

a) 1. Der Graph von f berührt an der Stelle $x = -1$ die x-Achse.
   2. f besitzt den Grad 4.

b) 1. g hat 2021 als Leitkoeffizient.
   2. g hat eine vierfache Nullstelle bei $x = 2$.

A.6.7 (Level:) Gib den Term einer gebrochen-rationalen Funktion an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt.

a) 1. Der Graph von f berührt an der Stelle $x = -1$ die x-Achse.
   2. f hat $x = 2$ als Polstelle.

b) 1. g hat $x = 0$ als Polstelle.
   2. g hat vierfache Nullstelle bei $x = 2$.

A.7.17 (Level: 🞲🞲) Bestimme die Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{e^{2x}}{e^x(x+1)}$ b) $\lim\limits_{x\searrow 0} (2x)^{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{2x^2+x+30}$

7.6 Taylor-/MacLaurin-Reihe

Eine Taylor-Reihe/ein Taylorpolynom ist eine Annäherung einer komplizierten Funktion durch ein einfaches Polynom für eine bestimmte Stelle x_0 (Entwicklungspunkt/-mitte). Ist $x_0 = 0$ sprechen wir auch von einer *MacLaurin-Reihe*.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \qquad (7.7) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0) \end{aligned}$$

Mit dem Restglied nach Lagrange:

$$\left(R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \;,\; \xi \in (x,x_0) \right) \qquad (7.8)$$

Lösungen ab S. 175

A.7.18 (Level: 🞲🞲) Bestimme die 2. Taylor-Polynome ($T_2(x)$) folgender Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-2e^x}{x}$, $x_0 = 1$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tanh(3x)$, $x_0 = 0$

7.7 Nullstellen numerisch bestimmen

Bei Funktionen, die analytisch nicht nach x aufzulösen sind, z. B. $f(x) = e^x + x = 0$, benötigen wir numerische Verfahren, um Näherungslösungen zu bestimmen.

7.7.1 Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren wird genutzt, um Nullstellen von Funktionen numerisch zu bestimmen bzw. sich ihnen anzunähern. Das Verfahren läuft iterativ ab mit einem Startwert x_0. Mit Hilfe dieses Verfahrens lässt sich die Nullstelle extrem schnell approximieren. Allerdings kann es auch passieren, dass der Algorithmus nicht terminiert bei ungünstig gewähltem x_0.

Newtonverfahren - Vorgehen

1. $f'(x)$ bestimmen (x_0 gegeben)
2. 1. Iterationsschritt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
   allg. n-ter Schritt: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ $\quad (n \to x)$

A Lösungen

Auf den folgenden Seiten findest du die Lösungen zu allen Aufgaben, sortiert nach den Kapiteln und Themen. Rechne immer zuerst die Aufgabe alleine und wenn du gar nicht weiter weißt, kannst du im Lernheft im entsprechenden Kapitel nochmal die Theorie und Begriffe wiederholen, die für die Aufgabe nötig sind. Die Lösungen sind sehr ausführlich beschrieben, damit du jeden Schritt gut nachvollziehen kannst.

A.1 zu Mathematischer Werkzeugkoffer

Zu beherrschende Techniken

A.1.1 Wir berechnen ohne Taschenrechner.

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$

b) $(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4096$

c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

d) $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$

A.1.2 Wir berechnen ohne Taschenrechner.

a) $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$

b) $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$

c) $x^{-3} = 1/x^3$

d) $x^n \cdot y^n \cdot z^n = (xyz)^n$

A.1.3 Wir berechnen ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{16}{2}} = \sqrt[5]{8}$

A.1.4 Wir berechnen ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

c) $\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$

A.1.5 Wir berechnen ohne Taschenrechner.

a) $\ln(e \cdot 2) = \ln(e) + \ln(2) = 1 + \ln(2)$

b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = 0 - 1 = -1$

c) $\ln(e^3) = 3 \cdot \ln(e) = 3 \cdot 1 = 3$

d) $\log_2(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$