# Inhalt

# Mathe Abitur in Nordrhein-Westfalen – Leistungskurs

Hi und herzlich willkommen!

Dieses Klausurenheft gibt deiner Abiturvorbereitung im Fach Mathematik den letzten Feinschliff! Was erwartet dich?

- originale Prüfungsaufgaben von 2020 bis 2022
  - Prüfungsteil A - Auswahl relevanter Aufgaben
  - Prüfungsteil B - Auswahl relevanter Aufgaben
- ausführliche Musterlösungen (von uns erstellt)
- Lernvideos via QR-Code an passenden Stellen
- inklusive (digitaler) Erweiterung der nächsten Prüfungsjahre

### Allgemeine Informationen zu deiner Prüfung

Die Mathe Abitur Prüfung ist in Nordrhein-Westfalen in zwei Teile gegliedert und du hast insgesamt 270 Minuten Zeit[1] für die Bearbeitung:

1. **Prüfungsteil A** – 6 Aufgaben ohne Hilfsmittel (max. 70 Minuten)
2. **Prüfungsteil B** – 3 Aufgaben mit Hilfsmitteln (mind. 200 Minuten)

Je eher du mit Teil A fertig bist, desto mehr Zeit hast du für Teil B.

Die Aufgaben in Teil A und Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben, wo du Punkte sammeln kannst: die sogenannten *Bewertungseinheiten* (BE). Insgesamt kannst du in beiden Prüfungsteilen maximal 120 BE erreichen. Die Verteilung ist üblicherweise wie folgt:

| | **Prüfungsteil A** | **Prüfungsteil B** |
|---|---|---|
| Analysis | 30 BE | 40 BE |
| Vekt. Geometrie<br>Stochastik | | je 25 BE |

### Welche Hilfsmittel sind zugelassen?

In Prüfungsteil B darfst du einen Taschenrechner (GTR oder CAS) verwenden. Außerdem kannst du eine *Mathematische Formelsammlung* und ein *Wörterbuch* zur deutschen Rechtschreibung während der Prüfung verwenden.

Zusammen werden wir das sicherlich gut meistern. Also, let's rock Mathe!

Daniel Jung

[1] Im Normalfall! Wegen Corona gibt es hier auch mal Anpassungen, wie z.B. in 2023!

# 1 Abi Klausur 2020 – Leistungskurs

## 1.1 Aufgaben

### 1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 70 Minuten
- Hinweis: Die Aufgaben sind nicht direkt einem Thema zugewiesen, wie es die folgende Tabelle vermuten lässt.
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

| Thema | Aufgabe | Teilaufgabe | Punkte | Erledigt? |
|---|---|---|---|---|
| **Analysis** | a) | (1) | 3 | ✓ |
| | | (2) | 3 | |
| | b) | (1) | 2 | |
| | | (2) | 4 | |
| **Vektorielle Geometrie** | c) | (1) | 2 | |
| | | (2) | 4 | |
| **Stochastik** | d) | (1) | 2 | |
| | | (2) | 1 | |
| | | (3) | 3 | |

## Analysis

**Aufgabenstellung:**

Flüsse treten manchmal über ihre Ufer. Zur Vermeidung solcher Überschwemmungen werden große Wasserbecken eingesetzt, sogenannte Rückhaltebecken. Droht eine Überschwemmung, so wird ein Teil des Flusswassers in das Rückhaltebecken geleitet. Dort wird das Wasser zunächst zurückgehalten und später kontrolliert in den Fluss geleitet.

Im Folgenden soll zunächst der Zufluss in und anschließend der Abfluss des Wassers aus einem Rückhaltebecken betrachtet werden.

Zur Modellierung der momentanen **Zuflussrate**, mit der das Wasser des Flusses während eines Beobachtungszeitraums von 40 Stunden in das Rückehaltebecken fließt, wird für $0 \leq t \leq 40$ die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(t) = 7\,200t^2 \cdot e^{-0{,}25t} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R},$$

verwendet. Dabei ist $t$ die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ die momentane Zuflussrate in $m^3$ Wasser pro Stunde.

In der folgenden Abbildung 1 ist der Graph von $f$ im Intervall $[0; 40]$ dargestellt.

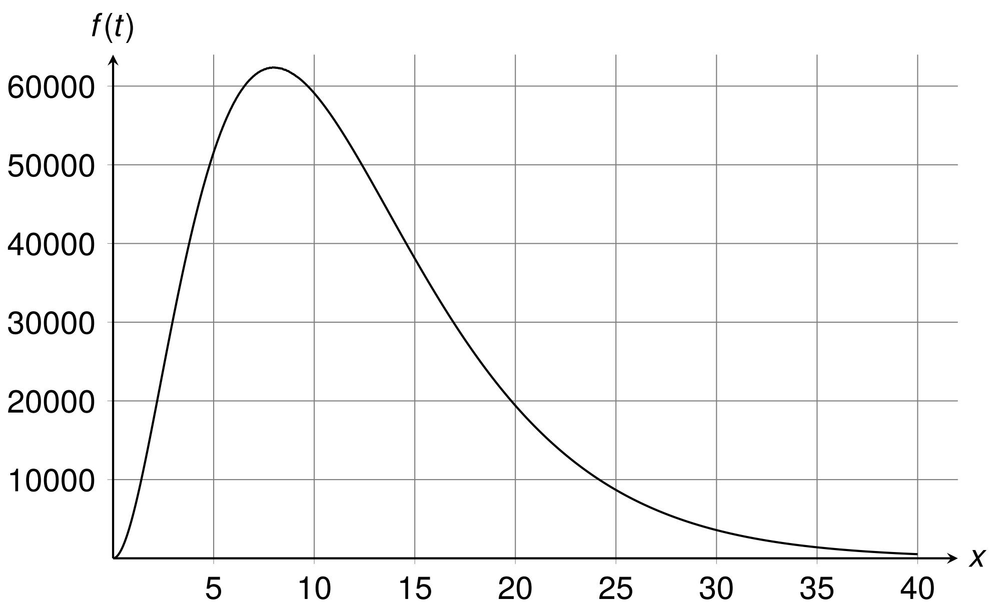



Abb. 1

a) (1) Geben Sie den Funktionswert von $f$ an der Stelle $t = 20$ an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) Zeigen Sie: $f'(t) = 7\,200 \cdot (-0{,}25t^2 + 2t) \cdot e^{-0{,}25t}$.

(3) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate im Modell 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist und geben Sie die maximale momentane Zuflussrate an.

## Geometrie

**Aufgabenstellung:**

In Abbildung 1 ist ein regelmäßiges Tetraeder *ABCD* mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(10|10|0)$, $C(10|0|10)$ und $D(0|10|10)$ in einem kartesischen Koordinatensystem abgebildet.

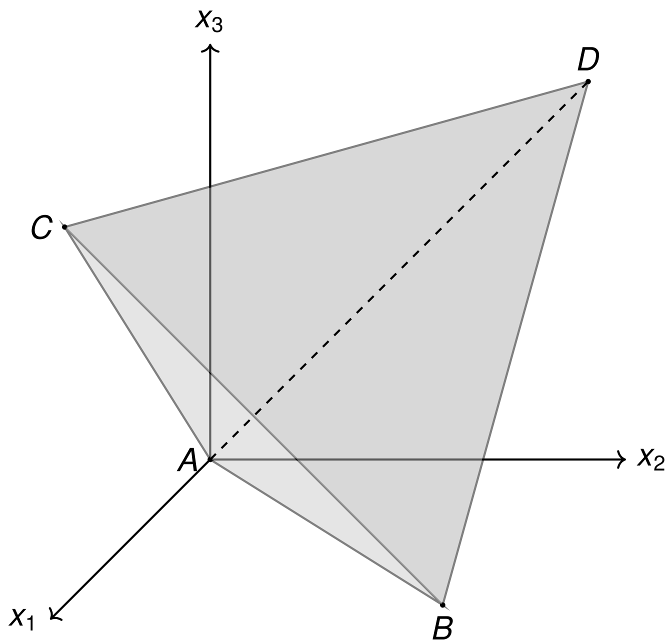



Abb. 1

a) (1) Zeigen Sie, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.

(2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* und den Oberflächeninhalt des Tetraeders *ABCD*.

(3) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1\,000$ [VE] an, der das Tetraeder enthält.

b) (1) Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene *E* auf, in der das Dreieck *ABC* liegt.

[Zur Kontrolle: $E: -x_1 + x_2 + x_3 = 0$]

(2) Stellen Sie die Dreiecksfläche *ABC* in einer Parameterform dar.

(3) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders *ABCD*.

# 1.2 Lösungen

## 1.2.1 Prüfungsteil A

**Lösung:**

a) (1) Zuerst vereinfachen wir die Funktion, indem wir die Klammer ausmultiplizieren und bestimmen dann die Ableitungsfunktion mit der Potenzregel:

Potenzregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot \left(x^2 - 1\right) \\ &= \left(x^3 - x\right)' \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Alternativ hätten wir auch die Produktregel anwenden können, aber das wäre wesentlich umständlicher. Anschließend setzen wir den Wert $x = -\frac{1}{2}$ in die Ableitungsfunktion ein

$$\begin{aligned} f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \tfrac{3}{4} - 1 \\ &= -\tfrac{1}{4} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

und haben damit gezeigt, dass $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ ist.

(2) Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ haben wir bereits in (1) berechnet:

Tangentengleichung aufstellen

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = m = -\tfrac{1}{4}$$

Nun benötigen wir noch einen Punkt, der auf der Tangenten liegt. Dafür setzen wir $x = -\frac{1}{2}$ in die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x$ ein, da die Tangente die Funktion an dieser Stelle berühren soll.

$$\begin{aligned} f\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

Wir setzen den Punkt $P\left(-\frac{1}{2}|\frac{3}{8}\right)$ und die Steigung $m = -\frac{1}{4}$ in die allgemeine Geradengleichung ein, um den fehlenden $y$-Achsenabschnitt zu berechnen.

$$\begin{aligned} y = m \cdot x + b \Rightarrow \quad \tfrac{3}{8} &= -\tfrac{1}{4} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + b \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{8} &= \tfrac{1}{8} + b \qquad \left| -\tfrac{1}{8} \right. \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4} &= b \end{aligned}$$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet somit

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

### 1.2.2 Prüfungsteil B

**Analysis**

**Lösung:**

a) (1) Wir setzen $t = 20$ in die Funktion $f(t)$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} f(20) &= 7\,200 \cdot 20^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 20} \\ &\approx 19\,405{,}3 \end{aligned}$$

**Interpretation**:
20 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Zuflussrate in das Rückhaltebecken ca. 19 405 $m^3$ Wasser pro Stunde.

(2) Die Ableitung erhalten wir mithilfe der Produkt- und Kettenregel.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(7\,200t^2 \cdot e^{-0{,}25t}\right)' \\ &= 7\,200 \cdot 2t \cdot e^{-0{,}25t} + 7\,200t^2 \cdot (-0{,}25) \cdot e^{-0{,}25t} \\ &= 7\,200\left(2t - 0{,}25t^2\right) \cdot e^{-0{,}25t} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Produkt- & Kettenregel

(3) Wir suchen die Stellen, für die die Funktion maximal wird. Dafür bestimmen wir zuerst die Nullstellen der Ableitungsfunktion.

$$\begin{aligned} f'(t) &\overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad 7\,200\left(2t - 0{,}25t^2\right) \cdot e^{-0{,}25t} &= 0 \quad | \div 7\,200 \\ \Leftrightarrow \quad \left(2t - 0{,}25t^2\right) \cdot \underbrace{e^{-0{,}25t}}_{\neq 0} &= 0 \quad | \text{ Satz vom Nullprodukt} \\ \Leftrightarrow \quad 2t - 0{,}25t^2 &= 0 \quad | \div (-0{,}25) \\ \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad t \cdot (t - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Extremstellen

Satz vom Nullprodukt

Aus dem Satz vom Nullprodukt folgen die beiden Nullstellen der Ableitungsfunktion:

$$t = 0 \quad \vee \quad t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 8$$

Einsetzen in die Ausgangsfunktion liefert die beiden Extremwerte:

$$\begin{aligned} f(0) &= 7\,200 \cdot 0^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 0} = 0 \\ f(8) &= 7\,200 \cdot 8^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 8} \approx 62\,362{,}5 \end{aligned}$$

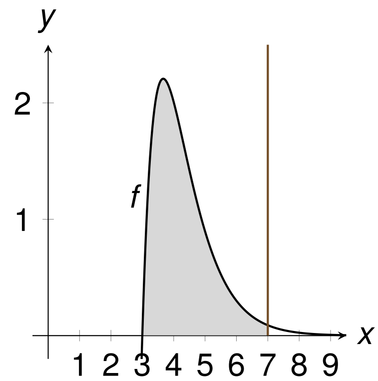
Wir prüfen noch den anderen Randpunkt des zu betrachtenden Intervalls ($t = 0$ haben wir als mögliche Extremstelle bereits betrachtet). Denk daran, auch immer die Randwerte zu betrachten!

$$f(40) = 7\,200 \cdot 40^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 40} \approx 523{,}0$$

(2) Den Flächeninhalt können wir mit Hilfe des Integrals bestimmen. Da eine Nullstelle bei $x = 3$ vorliegt, wird die Fläche bei $x = 3$ links durch Graphen beschränkt.

Auf der rechten Seite wird die Fläche durch die gegebene Gerade $x = 7$ begrenzt. Damit geht das Integral von 3 bis 7. Der Taschenrechner liefert uns:

$$\int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 3{,}93 \text{ [FE]}$$




(3) Wenn der TR uneigentliche Integrale (= mindestens eine Integralgrenze nicht definiert) beherrscht, folgt:

$$\lim_{w\to\infty}\left(\int_3^w f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 4$$

Der Inhalt der nach rechts offenen Fläche ($x \geq 3$) zwischen der $x$-Achse und dem Graphen der Funktion $f$ beträgt 4 Flächeneinheiten.

Alternativ kann mit dem TR die Stammfunktion gebildet und anschließend bei der Flächenberechnung der Grenzwert betrachtet werden:

$$\lim_{w\to\infty}\left(\int_3^w f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{w\to\infty} -2\cdot(3x-7)\cdot e^{-1{,}5(x-3)}\Big|_3^w$$

$$= \lim_{w\to\infty} -2\cdot(3\cdot w-7)\cdot e^{-1{,}5(w-3)} - \left(-2\cdot(3\cdot 3-7)\cdot e^{-1{,}5(3-3)}\right)$$

$$= \lim_{w\to\infty} \underbrace{-2\cdot(3\cdot w-7)\cdot \underbrace{e^{\overbrace{-1{,}5\cdot\overbrace{(w-3)}^{\to+\infty}}^{\to-\infty}}}_{\to 0}}_{\to 0} \underbrace{-(-4\cdot \underbrace{e^0}_{=1})}_{=-4}$$

$$= 4$$

(4) (i) Wir machen uns eine Skizze mit den Punkten $N$, $P$ und $Q_u$.

Als Grundseite des Dreiecks $NPQ_u$ kann die Strecke $\overline{NP}$ mit der Länge $(9-3) = 6$ Längeneinheiten verwendet werden. Die Höhe des Dreiecks ist durch $f(u)$ gegeben. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt:

$$A_{NPQ_u}(u) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot f(u) = 3\cdot f(u)$$