Inhalt

Mathe Abitur in Nordrhein-Westfalen – Grundkurs

Hi und herzlich willkommen!

Dieses Klausurenheft gibt deiner Abiturvorbereitung im Fach Mathematik den letzten Feinschliff! Was erwartet dich?

- originale Prüfungsaufgaben von 2020 bis 2022
  - Prüfungsteil A - Auswahl der relevanten Aufgaben
  - Prüfungsteil B - nur je eine Analysis-Aufgabe
- ausführliche Musterlösungen (von uns erstellt)
- Lernvideos via QR-Code an passenden Stellen
- inklusive (digitaler) Erweiterung der nächsten Prüfungsjahre

Allgemeine Informationen zu deiner Prüfung

Die Mathe Abitur Prüfung ist in Nordrhein-Westfalen in zwei Teile gegliedert und du hast insgesamt 225 Minuten Zeit für die Bearbeitung:

1. **Prüfungsteil A** – 5 Aufgaben ohne Hilfsmittel (max. 60 Minuten)
2. **Prüfungsteil B** – 3 Aufgaben mit Hilfsmitteln (min. 165 Minuten)

Je eher du mit Teil A fertig bist, desto mehr Zeit hast du für Teil B.

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben, wo du Punkte sammeln kannst, die sogenannten Bewertungseinheiten (BE). Insgesamt kannst du in beiden Prüfungsteilen maximal 100 BE erreichen. Die Verteilung ist wie folgt:

	Prüfungsteil A	**Prüfungsteil B**
Analysis		35 BE
Vekt. Geometrie	25 BE	20 BE
Stochastik		20 BE

Welche Hilfsmittel sind zugelassen?

In Prüfungsteil B darfst du einen Taschenrechner verwenden. Außerdem kannst du eine *Mathematische Formelsammlung* und ein *Wörterbuch* zur deutschen Rechtschreibung während der Prüfung verwenden.

Zusammen werden wir das sicherlich gut meistern. Also, let's rock Mathe!

Daniel Jung

1 Abi Klausur 2020 – Grundkurs

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 60 Minuten
- Hinweis: Die Aufgaben sind nicht direkt einem Thema zugewiesen, wie es die folgende Tabelle vermuten lässt.
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	a)	(1)	2	✓
		(2)	4	
	b)	(1)	2	
		(2)	4	
Vektorielle Geometrie	c)	(1)	2	
		(2)	2	
		(3)	2	
Stochastik	d)	(1)	2	
		(2)	1	
		(3)	3	

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: $f'(-1) = 2$.

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$.

---

b) Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = e^x - e,\ x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f und die Koordinatenachsen begrenzen im 4. Quadranten eine Fläche (vgl. Abbildung 1).

(1) Der Graph von f hat genau eine Nullstelle.
Zeigen Sie, dass $x = 1$ die Nullstelle des Graphen von f ist.

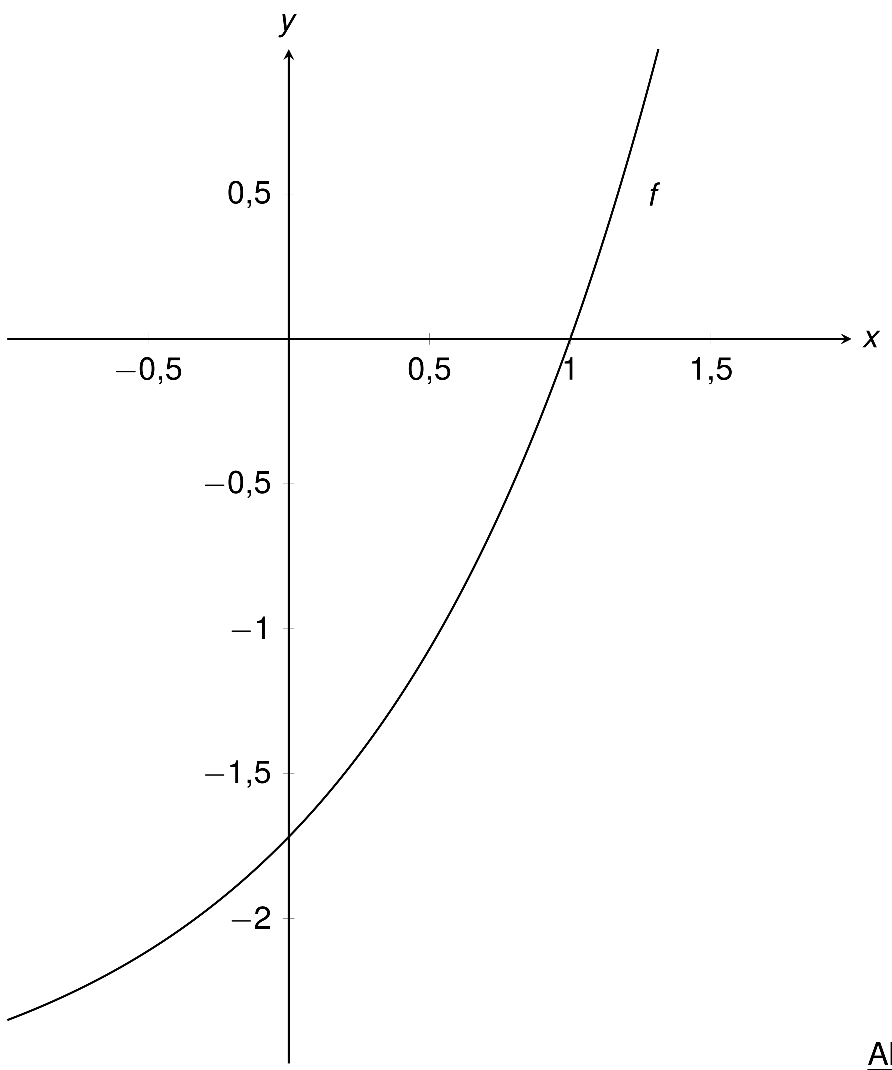

Abb. 1

(2) Berechnen Sie den Inhalt der vom Graphen von f und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche.

Analysis

Aufgabenstellung:

Flüsse treten manchmal über ihre Ufer. Zur Vermeidung solcher Überschwemmungen werden große Wasserbecken eingesetzt, sogenannte Rückhaltebecken. Droht eine Überschwemmung, so wird ein Teil des Flusswassers in das Rückhaltebecken geleitet. Dort wird das Wasser zunächst zurückgehalten und später kontrolliert in den Fluss geleitet.

Im Folgenden soll zunächst der Zufluss in und anschließend der Abfluss des Wassers aus einem Rückhaltebecken betrachtet werden.

Zur Modellierung der momentanen **Zuflussrate**, mit der das Wasser des Flusses während eines Beobachtungszeitraumes von 40 Stunden in das Rückehaltebecken fließt, wird für $0 \leq t \leq 40$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 7200t^2 \cdot e^{-0,25t} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R},$$

verwendet. Dabei ist t die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ die momentane Zuflussrate in m^3 Wasser pro Stunde.

In der folgenden Abbildung 1 ist der Graph von f im Intervall $[0; 40]$ dargestellt.

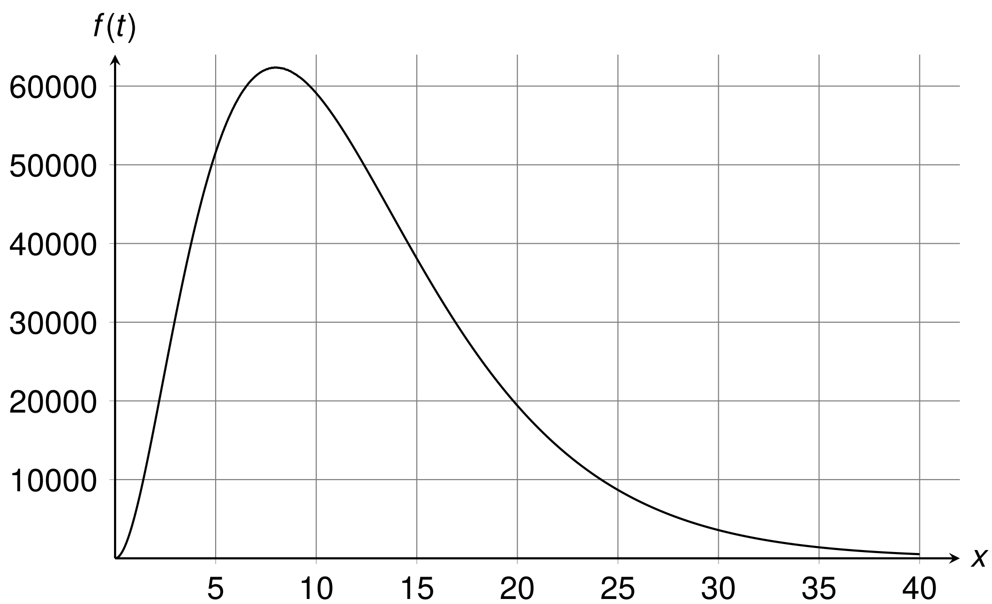

Abb. 1

a) (1) Geben Sie den Funktionswert von f an der Stelle $t = 20$ an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) Zeigen Sie: $f'(t) = 7200 \cdot (-0,25t^2 + 2t) \cdot e^{-0,25t}$.

(3) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate im Modell 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist, und geben Sie die maximale momentane Zuflussrate an.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

Lösung:

a) (1) Zuerst bestimmen wir die Ableitungsfunktion mit der Potenzregel:

Potenzregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - x\right)' \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Anschließend setzen wir den Wert $x = -1$ in die Ableitungsfunktion ein

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 1 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

und haben damit gezeigt, dass $f'(-1) = 2$ ist.

(2) Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -1$ haben wir bereits in (1) berechnet:

Tangente-gleichung aufstellen

$$f'(1) = m = 2$$

Nun brauchen wir noch einen Punkt, der auf der Tangenten liegt. Dafür setzen wir $x = -1$ in die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x$ ein, da die Tangente ja die Funktion an dieser Stelle berühren soll.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - (-1) \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir setzen den Punkt $P(-1|0)$ und die Steigung $m = 2$ in die allgemeine Geradengleichung ein, um den fehlenden y-Achsenabschnitt zu berechnen.

$$\begin{aligned} y = m \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad 0 &= 2 \cdot (-1) + b \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= -2 + b \qquad | +2 \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= b \end{aligned}$$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet somit

$$y = 2x + 2.$$

Nullstellen

b) (1) Um zu zeigen, dass bei $x = 1$ eine Nullstelle vorliegt, setzen wir $x = 1$ in die Funktionsgleichung $f(x)$ ein.

$$\begin{aligned} f(1) &= e^1 - e \\ &= e - e \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da der Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$ also Null ist, haben wir gezeigt, dass dort eine Nullstelle vorliegt.

Flächeninhalt

(2) Die y-Achse begrenzt die Fläche von links. Also ist eine Grenze $x = 0$. Die Nullstelle der Funktion liefert uns die zweite Grenze – und die haben wir ebenfalls schon mit $x = 1$ gegeben. Wir müssen also das Integral von 0 bis 1 bestimmen.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - e)\ \mathrm{d}x &= [e^x - e \cdot x]_0^1 \\ &= (e^1 - e) - (e^0 - 0) \\ &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Damit ist die eingeschlossene Fläche 1 FE groß.

Fehlende Punkte ermitteln

c) (1) Der Punkt G kann ausgehend vom Ursprung über die Kante $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und über $\overrightarrow{CG}$ erreicht werden. Da wir nicht alle Punkte gegeben haben, müssen wir etwas kreativ werden. Wir wissen: Parallel verlaufende Strecken werden durch den selben Richtungsvektor beschrieben. Da wir den Punkt C nicht kennen, nutzen wir für die Bewegung entlang der Kante $\overrightarrow{BC}$ den Vektor $\overrightarrow{AD}$. Außerdem nutzen wir für $\overrightarrow{CG}$ den Vektor $\overrightarrow{AE}$.
Also erhalten wir mit

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

den Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und damit den Punkt $G(-5|10|10)$.

(2) Wir haben die Vektoren, welche die Kanten beschreiben, bereits in (1) ermittelt. Um zu zeigen, dass die Kanten senkrecht zueinander verlaufen, muss das Skalarprodukt Null ergeben.

Skalarprodukt

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0 \checkmark$$

(3) Das Volumen eines Quaders über $V = a \cdot b \cdot c$ berechnet. Dabei stehen a, b und c für die Seitenlängen des Quaders. Wir haben die benötigten Vektoren bereits in den vorherigen Teilaufgaben berechnet. Um die Kantenlängen zu bestimmen, berechnen wir die Länge der Vektoren, die die Bewegung entlang der Kante beschreiben.

Länge eines Vektors

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} &&= \sqrt{25} &&= 5 \\ \left|\overrightarrow{AD}\right| &= \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} &&= \sqrt{100} &&= 10 \\ \left|\overrightarrow{AE}\right| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} &&= \sqrt{100} &&= 10 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das gesuchte Volumen:

$$V = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE}\right| = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ [VE]}$$

d) (1) Die Zufallsvariable ist binomialverteilt, da eine feste Anzahl an unabhängigen Versuchen n gegeben ist und die Wahrscheinlichkeit für Erfolg p (hier 0,1) und Misserfolg $1 - p$ (hier 0,9) konstant bleiben. Das bedeutet allgemein für die Wahrscheinlichkeit:

Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Betrachten wir nun den gegebenen Term in der Aufgabenstellung, sehen wir, dass $n = 7$ gilt und die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ betrachtet werden.

Damit beschreibt der Term die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

„Von sieben teilnehmenden Personen erhält höchstens eine Person einen Gewinn."

(2) Im Vergleich zur (1) sind nun 20 teilnehmende Personen (n) gegeben und es sollen genau 4 Personen gewinnen (k). Daraus folgt der Term:

$$P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16}$$

Mehr können wir an dieser Stelle nicht machen, da wir in Prüfungsteil A keinen Taschenrechner verwenden dürfen.