Inhalt

Mathe Abitur in Bayern

Hi und herzlich willkommen!

Dieses Klausurenheft gibt deiner Abiturvorbereitung im Fach Mathematik den letzten Feinschliff! Was erwartet dich?

- originale Prüfungsaufgaben „ohne CAS“ von 2020 bis 2022
  - Prüfungsteil A identisch zu „mit CAS“
  - Prüfungsteil B meist nur in Analysis abweichend
- ausführliche Musterlösungen (von uns erstellt)
- Lernvideos via QR-Code an passenden Stellen
- inklusive (digitaler) Erweiterung der nächsten Prüfungsjahre

Allgemeine Informationen zu deiner Prüfung

Die Mathe Abitur Prüfung ist in Bayern in zwei Teile gegliedert:

1. **Prüfungsteil A** – keine Hilfsmittel erlaubt (70 Minuten)
2. **Prüfungsteil B** – zugelassene Hilfsmittel erlaubt (200 Minuten)

In beiden Teilen kannst du Punkte sammeln, die sogenannten Bewertungseinheiten (BE). Insgesamt kannst du In beiden Prüfungsteilen maximal 120 BE erreichen. Die Verteilung ist wie folgt:

	Prüfungsteil A	**Prüfungsteil B**
Analysis	20 BE	40 BE
Stochastik	5 BE	25 BE
Geometrie	5 BE	25 BE

Du siehst also: Im Teilgebiet Analysis kannst du 50% aller Punkte sammeln!

Welche Hilfsmittel sind zugelassen?

In Prüfungsteil B darfst du einen Taschenrechner verwenden. Außerdem kannst du *Merkhilfe Mathematik* (eine vorgegebene Formelsammlung) sowie ein *Stochastisches Tafelswerk* während der Prüfung verwenden.

Zusammen werden wir das sicherlich gut meistern. Also, let’s rock Mathe!

Daniel Jung

Analysis

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto x \cdot \ln\left(x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h.

a) Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln(x^2) + 2$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h.

Aufgabe 2:
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f. Nur in den Punkten $(-4|f'(-4))$ und $(5|f'(5))$ hat der Graph $G_{f'}$ waagerechte Tangenten.

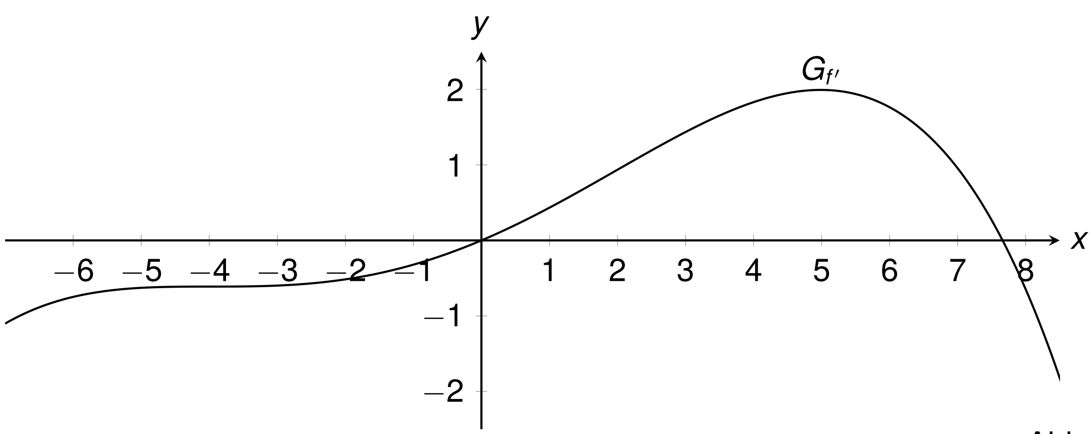


Abb. 1

a) Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt.

b) Es gibt Tangenten an den Graphen von f, die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat.

Aufgabe 3:
Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m : x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f und der Graph von g_m mit G_m bezeichnet.

a) Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4.

b) Es gibt Werte von m, für die die Graphen G_f und G_m jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von m an.

Geometrie

Aufgabe 1:
Die Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Mehrzweckhalle, die auf einer horizontalen Fläche steht und die Form eines geraden Prismas hat.

Die Punkte $A_1(0|0|0), A_2(20|0|0), A_3$ und $A_4(0|10|0)$ stellen im Modell die Eckpunkte der Grundfläche der Mehrzweckhalle dar, die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Eckpunkte der Dachfläche. Diejenige Seitenwand, die im Modell in der x_1x_3-Ebene liegt, ist 6m hoch, die ihr gegenüberliegende Wand nur 4m.

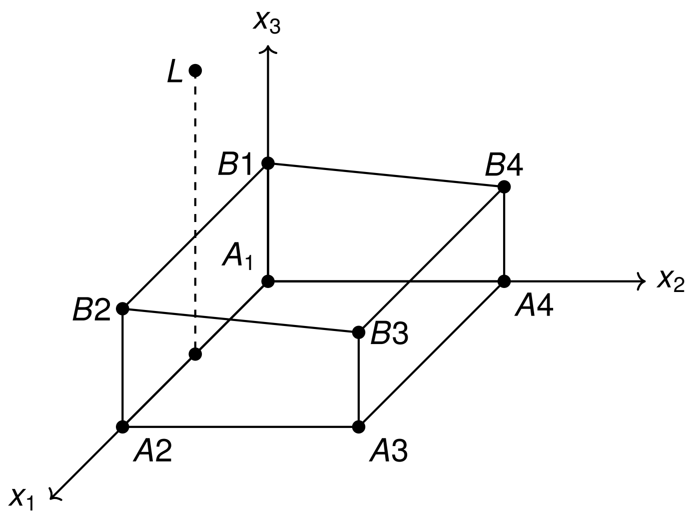


Abb. 1

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m, d.h. die Mehrzweckhalle ist 20m lang.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 an und bestätigen Sie, dass diese Punkte in der Ebene $E : x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ liegen.

b) Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche gegenüber der Horizontalen.

c) Der Punkt $T(7|10|0)$ liegt auf der Kante $[A_3A_4]$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es Punkte auf der Kante $[B_3B_4]$ gibt, für die gilt: Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten B_1 und T stehen aufeinander senkrecht. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Der Punkt L, der vertikal über dem Mittelpunkt der Kante $[A_1A_2]$ liegt, veranschaulicht im Modell die Position einer Flutlichtanlage, die 12m über der Grundfläche angebracht ist. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle beleuchtet – mit Ausnahme des Schattenbereichs in der Nähe der Hallenwände – das gesamte Gelände um die Halle.

d) Die Punkte L, B_2 und B_3 legen eine Ebene F fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

[zur Kontrolle: $F : 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$]

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

Analysis

zu Aufgabe 1:

a) Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Argumente definiert. Also muss $x^2 > 0$ gelten. Dies ist für alle reelle Zahlen außer der Null gegeben.

$$D_h = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Produkt- und Kettenregel

Nun bestimmen wir noch die Ableitungsfunktion:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(x \cdot \ln(x^2)\right)' \\ &= 1 \cdot \ln(x^2) + x \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \ln(x^2) + \frac{2x^2}{x^2} \\ &= \ln(x^2) + 2 \end{aligned}$$

Verständnis

b) Für die Extrempunkte prüfen wir, an welchen Stellen der Graph eine waagerechte Tangente besitzt, also wo die Ableitungsfunktion Null wird.

$$\begin{aligned} & h'(x) &= \;& 0 & \\ \Rightarrow\; & \ln(x^2) + 2 &= \;& 0 & \quad |-2 \\ \Leftrightarrow\; & \ln(x^2) &= \;& -2 & \quad |e^{\cdots} \\ \Leftrightarrow\; & x^2 &= \;& e^{-2} & \quad |\sqrt{\cdots} \\ \Rightarrow\; & x_{1,2} &= \;& \pm\sqrt{e^{-2}} = \pm\sqrt{(e^{-1})^2} & \\ & &= \;& \pm e^{-1} = \pm\tfrac{1}{e} & \end{aligned}$$

Da es im II. Quadranten nur die Stelle $x = -\frac{1}{e}$ gibt, bei der der Graph von h eine waagerechte Tangente besitzt, muss dies die x-Koordinate des Hochpunkts sein.

Für die y-Koordinate setzen wir diese Stelle in die Funktion h ein:

$$\begin{aligned} h\left(-\tfrac{1}{e}\right) &= -\tfrac{1}{e} \cdot \ln\left(\left(-\tfrac{1}{e}\right)^2\right) \\ &= -\tfrac{1}{e} \cdot \ln\left(e^{-2}\right) \\ &= -\tfrac{1}{e} \cdot (-2) \\ &= \tfrac{2}{e} \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt der Punkt $H\left(-\frac{1}{e} \middle| \frac{2}{e}\right)$.

zu Aufgabe 2:

a) Die Wendestellen von $f(x)$ befinden sich dort, wo $f''(x) = 0$ gilt und $f''(x)$ das Vorzeichen wechselt.

Krümmung und Wendestellen

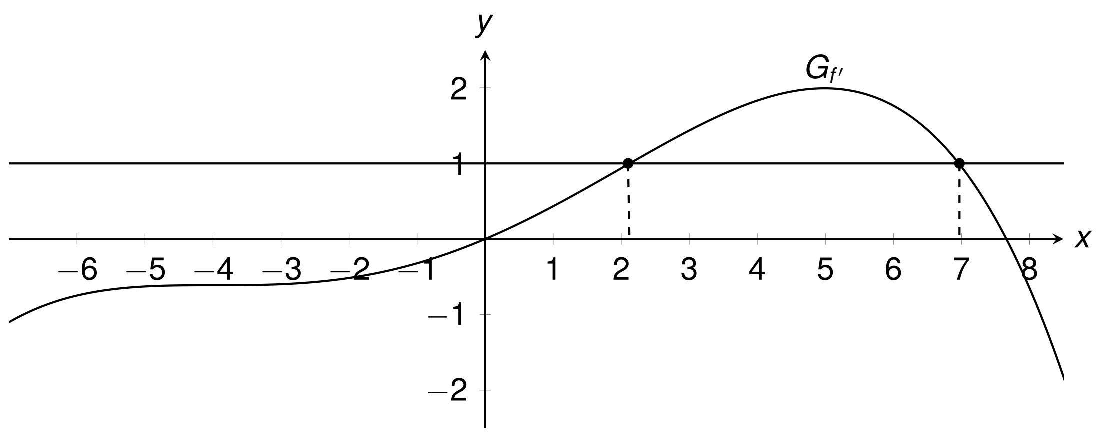
Da $f''(x)$ die Ableitungsfunktion von $f'(x)$ ist, geben die Nullstellen von $f''(x)$ genau die Stellen an, an denen $f'(x)$ eine waagerechte Tangente hat. Das ist laut Angabe für $x = -4$ und $x = 5$ erfüllt. Der Graph zeigt, dass nur für $x = 5$ ein Wechsel des Vorzeichens von $f''(x)$ erfolgt, da $f'(x)$ vor der Stelle $x = 5$ ansteigt und danach abfällt.

In $x = -4$ fällt der Graph von $f'(x)$ sowohl vorher als auch nachher.

Also hat $f(x)$ nur eine Wendestelle, nämlich bei $x = 5$.

b) Die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ist die Gerade mit der Gleichung $y = x$. Die Steigung dieser Gerade ist somit 1.

Wir suchen also diese Stellen, an denen die Funktion $f'(x)$ den Wert 1 annimmt. Nehmen wir das Geodreieck und zeichnen eine Gerade bei $y = 1$, dann ergeben die Schnittpunkte mit dem Graphen die Punkte, bei denen $f'(x) = 1$ gilt.



Die Tangente an f hat bei $x \approx 2$ und bei $x \approx 7$ die Steigung 1.

zu Aufgabe 3:

a) G_f ist eine Normalparabel, die um 4 Einheiten nach oben verschoben wurde. Um die Schnittpunkte zu bestimmen, prüfen wir, an welchen Stellen die Funktionsgleichungen denselben Wert liefern.

Schnittpunkt zweier Funktionen

$$\begin{array}{rrcll} & f(x) & = & g_4(x) & \\ \Rightarrow & x^2 + 4 & = & 4x & \mid -4x \\ \Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 & = & 0 & \mid \text{clever umformen} \\ \Leftrightarrow & (x-2)^2 & = & 0 & \end{array}$$

Geometrie

Aufgabe 1:
Die Punkte $A(6|0|4), B(0|6|4), C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

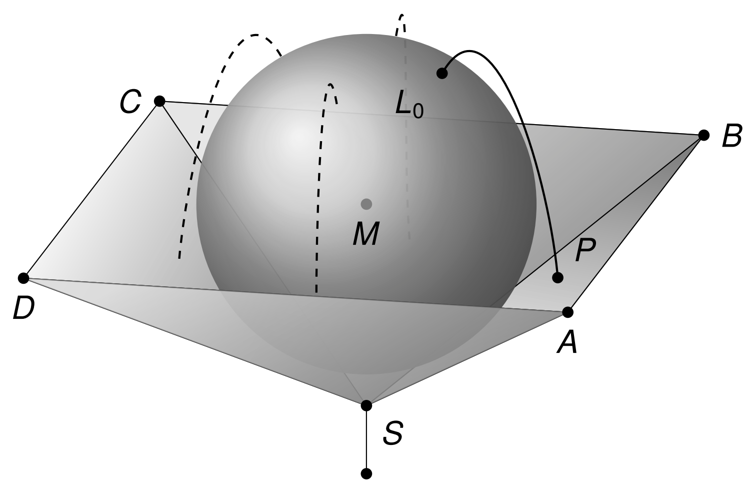
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

[zur Kontrolle: $F : x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$]

c) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $ABCDS$.

[zur Kontrolle: $V = 72$]

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwänder der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide $ABCDS$ beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r.



Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

d) Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

$\left[\text{zur Kontrolle: } r = \sqrt{6}\right]$

Die Diskriminante (Wert innerhalb der Wurzel) entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Ist die Diskriminante positiv, so existieren zwei Lösungen

$$4b^2 + 4a^2c > 0$$

Durch das b^2 ist der erste Summand immer positiv. Da nach Forderung $a \neq 0$ und $c > 0$, ist aufgrund von a^2 auch der zweite Summand ein Produkt aus positiven Faktoren, also selbst postiv. Eine Summe aus positiven Summanden ist selbst auch wieder positiv und somit ist es auch unsere Diskriminante.

Da die Nullstellen zudem einfache Nullstellen sind (also wir keine doppelte Nullstelle haben), wird die x-Achse auch tatsächlich geschnitten. Das bedeutet, es liegt ein Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion vor und somit hat der Graph der Funktion unter den angegebenen Einschränkungen zwei Extrempunkte.

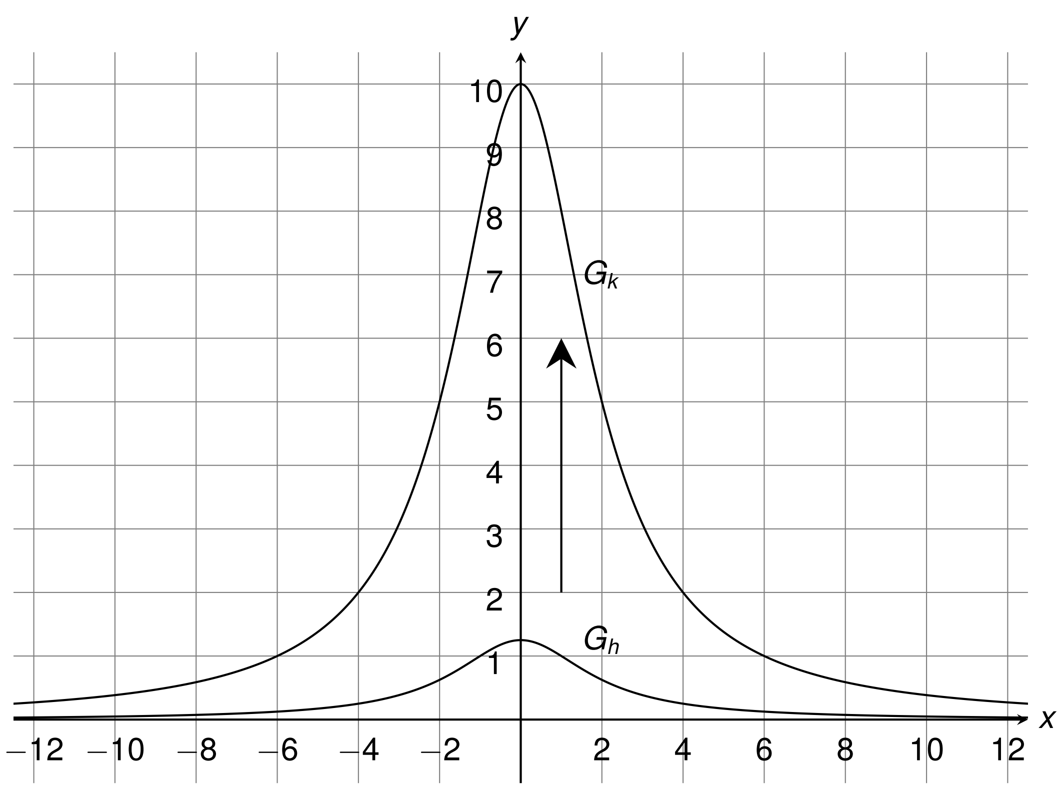
zu Aufgabe 3:

a) Die Funktion $h(x)$ gehört zu dem Schar $f_{a,b,c}$ aus Aufgabe 2. Es gilt $a = 0$ und $c = 4 > 0$. Aus der Teilaufgabe 2 b) wissen wir, dass h symmetrisch zur y-Achse ist und aus 2 c) wissen wir, dass h vollen Definitionsbereich hat ($D_h = \mathbb{R}$).

Trans-
formation

Zuerst strecken wir die Funktion $h(x)$ in y-Richtung, indem wir die Funktion mit dem Faktor 8 multiplizieren

$$k(x) = \frac{40}{x^2 + 4} = 8 \cdot h(x)$$



Krümmungsverhalten

c) Da der Graph rechtsgekrümmt ist, muss die zweite Ableitung für alle x aus dem Definitionsbereich negativ sein. Da weder der Vorfaktor 50 noch der Wurzelausdruck einen negativen Faktor liefert, muss entweder

$$\frac{1}{x^2-10x} < 0 \text{ oder } \frac{1}{10x-x^2} < 0$$

sein. Diese beiden Brüche werden genau dann negativ, wenn der Nenner negativ ist. Würde der Nenner von $\frac{1}{10x-x^2}$ negativ werden, dann hätten wir in unserer Funktion $f(x)$ einen negativen Ausdruck unterhalb der Wurzel und dies führt zu einem Widerspruch.

Damit muss der Ausdruck I die 2. Ableitung von f sein.

d) Wir bestimmen zunächst die Funktionswerte für $f(5-x)$ und $f(5+x)$:

$$\begin{aligned} f(5-x) &= 2\sqrt{10(5-x)-(5-x)^2} \\ &= 2\sqrt{50-10x-25+10x-x^2} \\ &= 2\sqrt{25-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5+x) &= 2\sqrt{10(5+x)-(5+x)^2} \\ &= 2\sqrt{50+10x-25-10x-x^2} \\ &= 2\sqrt{25-x^2} \end{aligned}$$

Also insgesamt gilt:

$$f(5-x) = 2\sqrt{25-x^2} = f(5+x)$$

Da für $0 \leq x \leq 5$ sowohl $5-x \in [0;10]$ ist, als auch $5+x \in [0;10]$, liegen wir im Definitionsbereich und die Gleichung gilt für alle $x \in [0;5]$.

e) Bei dieser Funktion können Definitionslücken einerseits dadurch entstehen, dass durch Null geteilt wird und andererseits dadurch, dass unterhalb der Wurzel ein negativer Ausdruck entsteht. Wir betrachten somit die beiden Einschränkungen:

$$\sqrt{10x-x^2} \neq 0 \quad \text{und} \quad 10x-x^2 \geq 0$$

Der Wurzelausdruck wird genau dann Null, wenn der Ausdruck unter der Wurzel Null wird. Also streichen wir beim zweiten Fall die Möglichkeit, dass dieser Null werden darf und wir betrachten ausschließlich den Fall:

$$\begin{aligned} 10x-x^2 &> 0 \\ \Rightarrow \quad x(10-x) &> 0 \end{aligned}$$

Dies liefert uns die drei Intervalle:

$$]-\infty;0[\quad \text{und} \quad]0;10[\quad \text{und} \quad]10;\infty[$$