Inhalt

1 Grundlagen 5
1.1 Das Zufallsexperiment 5
1.2 Ergebnis, Ereignis und Ergebnisraum 5
1.3 Verknüpfungen von Ereignissen 6
1.4 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff 7
1.5 Wahrscheinlichkeit nach Laplace 7

2 Baumdiagramme 9
2.1 Mit oder ohne Zurücklegen? 9
2.1.1 Zufallsexperiment „mit Zurücklegen“ 9
2.1.2 Zufallsexperiment „ohne Zurücklegen“ 10
2.2 Wahrscheinlichkeit mit Pfadregel 10

3 Kombinatorik 13

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten 17
4.1 Vierfeldertafel 17
4.2 Satz von Bayes 18
4.3 Stochastische Unabhängigkeit 18

5 Spezielle diskrete Verteilungen 21
5.1 Zufallsvariablen und Verteilungen 21
5.2 Diskrete Zufallsvariablen 22
5.3 Träger einer diskreten Zufallsvariablen 22
5.4 Wahrscheinlichkeitsfunktion 22
5.5 Verteilungsfunktion 23
5.6 Verteilungsparameter 24
5.7 Bernoulliverteilung 26
5.8 Binomialverteilung 26
5.8.1 Typische Binomialrechnungen 29
5.8.2 Übersicht typischer Fragestellungen 29
5.8.3 Aufgabentyp: Anzahl Ziehungen ermitteln 30
5.8.4 σ-Regeln 30
5.9 Hypergeometrische Verteilung 31

6 Spezielle stetige Verteilungen 33
6.1 Stetige Zufallsvariablen 33
6.2 Verteilungsparameter stetiger Zufallsvariablen 34
6.3 Normalverteilung 36
6.3.1 Standardisieren von normalverteilten Zufallsvariablen 36
6.3.2 Wie lese ich Φ-Werte ab? 37
6.3.3 Wahrscheinlichkeiten für Intervalle 37
6.3.4 Quantile bestimmen 38

7 Hypothesentests 41
7.1 Übersicht 42
7.2 Aufstellen der Hypothesen 42
7.3 Testgröße und Stichprobenlänge 43
7.4 Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich 44
7.5 Wahrscheinlichkeiten bestimmen 45
7.5.1 Ablesen aus der F-Tabelle 45
7.5.2 mit dem GTR/CAS 46
7.6 Fehler beim Testen 46
7.7 Alternativtest 47
7.8 Hypothesentest mit σ-Regeln 48
7.8.1 Beidseitiger Hypothesentest 49
7.8.2 Einseitiger Hypothesentest 51
7.9 Hypothesentest mit Ablesen aus Tabelle 54
7.9.1 Linksseitiger Hypothesentest 55
7.9.2 Rechtsseitiger Hypothesentest 56
7.9.3 Beidseitiger Hypothesentest 58

1 Grundlagen

1.1 Das Zufallsexperiment

Bei einem Zufallsexperiment (auch Zufallsversuch genannt) handelt es sich um einen Versuch, der unter bestimmten Bedingungen durchgeführt wird und einen zufälligen Ausgang besitzt.

Definition

Eigenschaften eines Zufallsexperimentes:

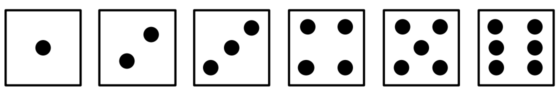
- geplanter und kontrolliert ablaufender Zufallsvorgang
- wiederholbar unter gleichen Bedingungen
- mögliche Ergebnisse des Vorgangs stehen im Voraus fest
- das tatsächliche Ergebnis ist im Voraus nicht bekannt

Beispiele: Werfen eines Würfels, Ziehung der Lottozahlen

1.2 Ergebnis, Ereignis und Ergebnisraum

Ein Elementarereignis ist ein einzelnes und sich gegenseitig ausschließendes mögliches Ergebnis ω eines Zufallsexperimentes. Wenn wir einen Würfel einmal werfen, gibt es nur folgende Möglichkeiten, wie der Würfel fallen kann:

Ergebnisraum



$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$ $\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_6 = 6$

Die Menge aller möglichen Ergebnisse ω_i heißt Ergebnisraum Ω, wobei jedes Ergebnis genau einmal in Ω vorkommt. Für unser Beispiel mit dem einmaligen Werfen eines Würfels folgt für den Ergebnisraum:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

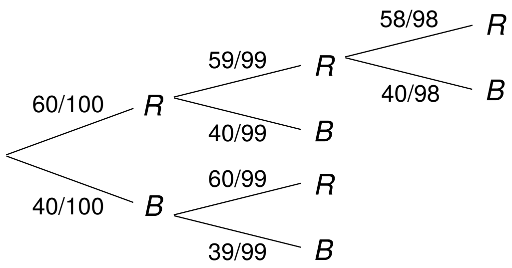
Jede Zusammenfassung von einem oder mehreren Ergebnissen eines Zufallsexperimentes in einer Menge wird Ereignis genannt. Beispiele für Ereignisse:

2.1.2 Zufallsexperiment „ohne Zurücklegen“

ohne Zurücklegen

In einer Urne befinden sich 60 rote Kugeln (R) und 40 blaue Kugeln (B). Wir ziehen zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Wie wir bereits wissen, können wir hier die Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen und erhalten die folgenden Wahrscheinlichkeiten für den ersten Zug:

$$P(R) = 0{,}6 = \frac{60}{100} \text{ bzw. } P(B) = 0{,}4 = \frac{40}{100}$$



Erste Ziehung:
Im Baumdiagramm sehen wir die Wahrscheinlichkeiten im ersten Zug eine rote oder eine blaue Kugel zu ziehen. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse, erhalten wir: $P(\Omega) = 1$.

Zweite Ziehung:
Im Gegensatz zum *Ziehen mit Zurücklegen* ändern sich die Wahrscheinlichkeiten beim *Ziehen ohne Zurücklegen* im zweiten Zug. Zieht man beispielsweise im ersten Zug eine rote Kugel, so hat man im zweiten Zug eine geringere Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen. Warum? Weil sich die Anzahl der günstigen und der möglichen Ereignisse (eine Rote Kugel weniger) um 1 verringert. Es befinden sich also nur noch 59 rote und insgesamt 99 Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, ändert sich von 60/100 auf 59/99.

Merke: Bei Zufallsexperimenten ohne Zurücklegen ist es sinnvoller Brüche statt Dezimalzahlen für die Wahrscheinlichkeiten zu verwenden.

2.2 Wahrscheinlichkeit mit Pfadregel

Pfadregeln

Um die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses zu erhalten, multipliziert man die Wahrscheinlichkeit entlang des Pfades, der dieses Ergebnis beschreibt. Wichtig: Die Pfadregel gilt bei jedem mehrstufigen Zufallsexperiment, gleichgültig, ob mit oder ohne Zurücklegen.

Zur **Ermittlung einer Wahrscheinlichkeit**

- zeichnet man ein **Baumdiagramm** und
- wendet die **Pfadregel** an!

Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gesucht,

- genügt es, nur die Pfade zu zeichnen, die zu diesem Ereignis gehören,
- die Pfadregel anzuwenden und
- die Wahrscheinlichkeiten dieser Pfade zu addieren (Summenregel).

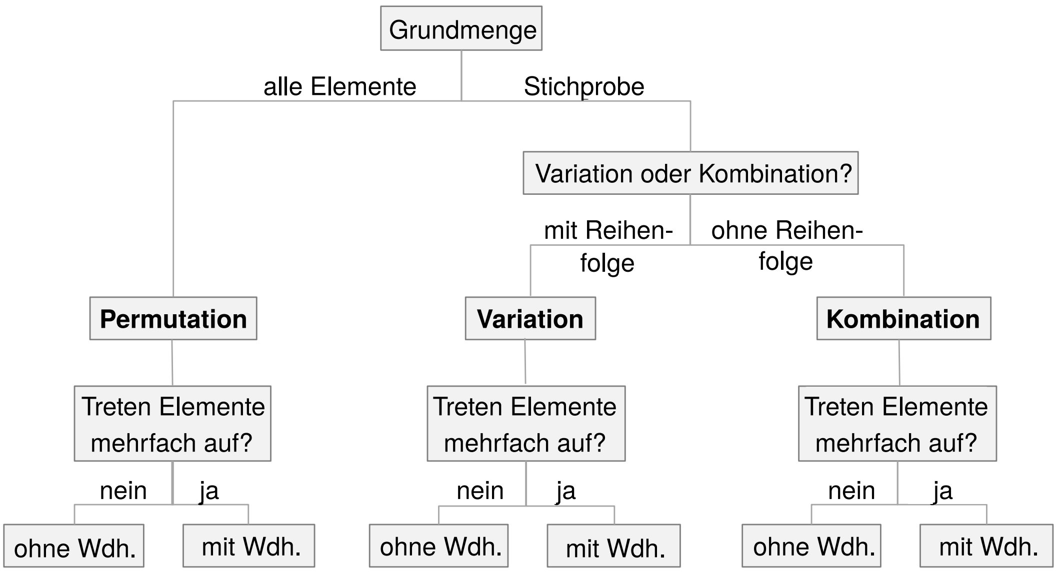
1. Pfadregel (Produktregel):
Die Wahrscheinlichkeiten eines einzelnen Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zu diesem Ergebnis führt.

3 Kombinatorik

> Erinnern wir uns an dieser Stelle an den Quotienten der Laplace -Wahrscheinlichkeit:
>
> $$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Bei der Bestimmung dieses Quotienten bedient man sich der Kombinatorik. Dort veranschaulicht man Ergebnisse für Zufallsexperimente mit endlicher Ergebnismenge häufig anhand des Urnenmodells - gedanklich ein Gefäß mit n durchnummerierten Kugeln, von denen k zufällig ausgewählt werden. Die Auswahl der Kugeln ist als Ziehung einer Zufallsstichprobe des Umfangs k aus einer Grundgesamtheit mit n Elementen zu interpretieren. Wenn jede denkbare Stichprobe des Umfangs k mit gleicher Wahrscheinlichkeit realisiert wird, liegt eine einfache Zufallsstichprobe vor.

Übersicht



Formeln	$n!$	$\frac{k!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Wie viele Möglichkeiten der Auswahl der n Elemente es gibt, hängt davon ab, ob die Elemente der Stichprobe nach der Ziehung jeweils wieder zurückgelegt werden oder nicht (Urnenmodell bzw. Stichprobenziehung mit/ohne Zurücklegen). Die Anzahl der Möglichkeiten hängt auch davon ab, in welcher Reihenfolge die n nummerierten Kugeln gezogen werden (Stichprobenziehung mit/ohne Berücksichtigung der Anordnung). Formeln für die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten der

5.2 Diskrete Zufallsvariablen

> Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn es endlich oder abzählbar unendlich viele Werte X_1, X_2, X_3, …, X_n annehmen kann.
>
> Eine Zufallsvariable (X), die nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt, ist immer diskret.

Beispiele: Augenzahl beim Würfeln, Münzwurf

5.3 Träger einer diskreten Zufallsvariablen

Der Träger T_X einer diskreten ZV X ist die Menge aller Werte, die X mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Meist ist der Träger einer diskreten Zufallsvariablen eine Teilmenge der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Den Träger T_X kann man auch als Ereignisraum verstehen.

> **Wichtig: Es müssen zunächst immer alle Träger der Zufallsvariablen ermittelt werden, um dann die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.**

Beispiele: Augenzahl beim einmaligen Würfeln (Ereignisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) oder Anzahl von der Ziehung eines normalen Kartenspiels ohne Zurücklegen, bis die Karo 7 gezogen wird ($\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 32\}$).

5.4 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wahrscheinlichkeitsverteilung

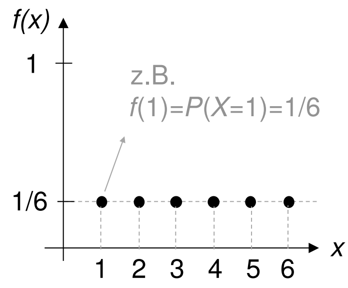
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Werte einer Zufallsvariablen verteilen und ist nur für diskrete Zufallsvariablen definiert.

> Definition:
> $$f : \mathbb{R} \to [0; 1], \quad f : x \to f(x) = P(X = x) = p$$

$P(X = x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die ZV X den Wert x annimmt. Mag auf den ersten Blick kompliziert sein, aber wir betrachten dafür mal ein kleines Beispiel:

Es wird ein normaler Würfel geworfen. Wie bereits beschrieben müssen erst die Träger der Zufallsvariablen bestimmt werden, welche auch als Ereignisraum verstanden werden können. Der Ereignisraum lautet also $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

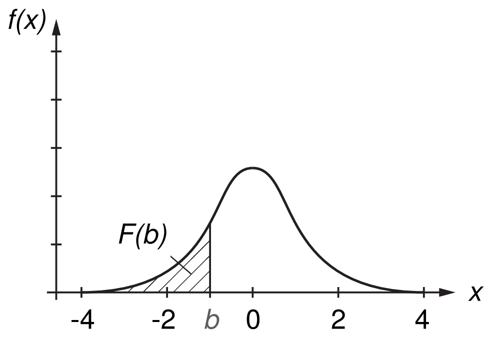
X_i	n_i	p_i
1	1	1/6
2	1	1/6
3	1	1/6
4	1	1/6
5	1	1/6
6	1	1/6
$\sum$	6	1

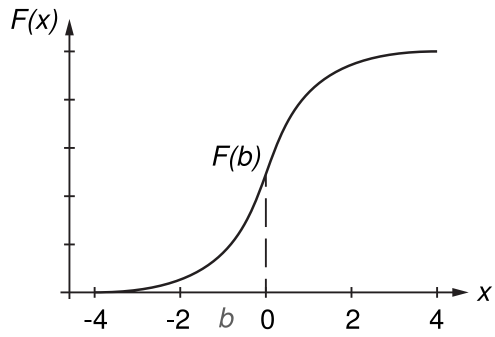


Danach werden die Wahrscheinlichkeiten, analog zu den bisherigen Wahrscheinlichkeiten, mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnet.

- Bei einer stetigen Zufallsvariablen ist $P(X = x) = 0$, da es als unmöglich angesehen wird, genau einen bestimmten Wert x zu „treffen“. Man betrachtet bei einer stetigen Zufallsvariablen nur Wahrscheinlichkeiten der Art $P(X \leq x)$, welche durch die Verteilungsfunktion charakterisiert wird, siehe Gl. (6.1).

- Die Dichtefunktion f und die Verteilungsfunktion F enthalten die gleiche Information. Der Unterschied besteht lediglich in der Darstellung dieser Information.





Es gelten folgende Eigenschaften für die Dichtefunktion:

- Nichtnegativität: $f(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

- Normiertheit: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, das entspricht der Fläche unter der Funktion!

> **Merke: Es wird immer ein Intervall betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit für exakt einen Wert ist immer gleich Null!**

Beispiel Carlo fragt Markus, wie hoch die Wahrscheinlichkeit sei, dass es heute 32 Grad werden. Markus hat den StudyHelpKurs Stochastik bereits im letzten Jahr gehört und sagt: „0“. Carlo fragt nach einer Begründung. Als erstes antwortet Markus, dass es sich um eine stetige Zufallsvariable handelt und führt dann folgende Rechnung aus. Er denkt sich als Funktion $f(x) = 1/10$ aus, weil der Wetterbericht Höchstwerte zwischen 25 und 30 Grad angesagt hat.

1. $P = (32 \leq X \leq 32)$ für $P(X = 32)$

2. Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{32}^{32} \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10} \cdot 32 - \frac{1}{10} \cdot 32\right] = 0$

6.2 Verteilungsparameter stetiger Zufallsvariablen

Verteilungsparameter sind Größen, die bestimmte Aspekte einer Verteilung charakterisieren, wie zum Beispiel Lage, Streuung oder Schiefe einer Verteilung. Wichtige Parameter sind:

Erwartungswert (Lageparameter)

- Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Verteilung und beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt.

6.3.2 Wie lese ich Φ-Werte ab?

Um die Werte von Φ (ausgesprochen: Phi) abzulesen, verwenden wir die Tabelle der Standardnormalverteilung, die ihr dann in der Klausur bekommen werdet. In der folgenden Abbildung seht ihr einen Ausschnitt einer solchen Tabelle und Beispiele, wie man mit der Tabelle umgehen muss. Das Ablesen sollte euch keine Probleme machen!

Φ ablesen

Minuswerte

<u>Ausschnitt der Standard-</u>
***<u>Normalverteilungs</u>*<u>-Tabelle</u>**

Hinweis:
auf 2 Nachkommastellen runden

Beispiele:

$\Phi(0{,}32) = 0{,}6255 \approx 62{,}55\%$

$$\Phi(-1{,}40) = 1 - \Phi(1{,}40) = 1 - 0{,}9192 \approx 8{,}1\%$$

Allg.: $\Phi(z) = 0,\ldots \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

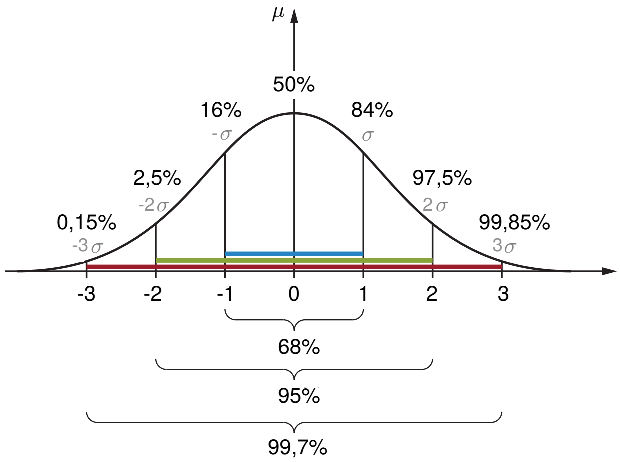
z	0	1	2	3	4
0,0	5000	5040	5080	5120	5160
0,1	5398	5438	5478	5517	5557
0,2	5793	5832	5871	5910	5948
0,3	6179	6217	6255	6293	6331
0,4	6554	6591	6628	6664	6700
0,5	6915	6950	6985	7019	7054
0,6	7257	7291	7324	7357	7389
0,7	7580	7611	7642	7673	7704
0,8	7881	7910	7939	7967	7995
0,9	8159	8186	8212	8238	8264
1,0	8413	8438	8461	8485	8508
1,1	8643	8665	8686	8708	8729
1,2	8849	8869	8888	8907	8925
1,3	9032	9049	9066	9082	9099
1,4	9192	9207	9222	9236	9251

6.3.3 Wahrscheinlichkeiten für Intervalle

> Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $a,\ b \in \mathbb{R},\ a \leq b$, dann gilt:
>
> $$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
> $$P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
> $$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Wegen Symmetrie der Dichtefunktion gilt $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Falls also in der Klammer von Φ eine negative Zahl rauskommt, könnt ihr diese so umschreiben.

Es folgt eine Skizze einer Normalverteilungsdichte mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Sie hat ihr Maximum an der Stelle μ und fällt im Bereich von ungefähr $\pm 3\pi$. Außerhalb eines Abstandes von 3π ist die Dichte nahe bei Null.



7.1 Übersicht

Übersicht

In diesem Abschnitt wollen wir euch eine grobe Übersicht zum Thema *Testen* geben. Dabei sei die Aussage: 30% lieben Mathe, welche unsere H_0 Hypothese sein soll. Mit Hilfe des Stichprobenumfangs $n = 100$ (100 Schüler wurden befragt) und der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt werden. Der höchste Wert der Verteilung entspricht dabei immer dem Erwartungswert. Die folgende Abbildung zeigt uns, welcher Test infolge der Aufgabenstellung durchgeführt werden soll und wie die Gegenhypothese H_1 lauten muss.

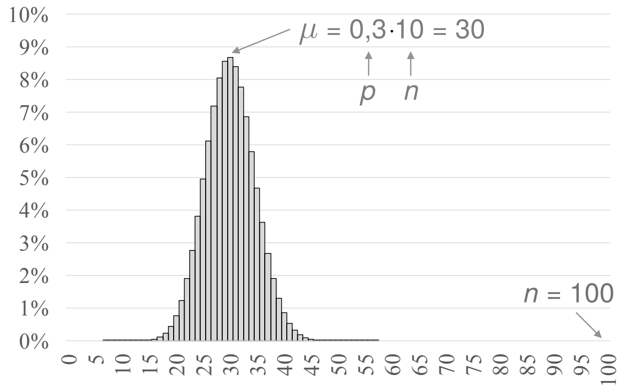
Aussage: **30% lieben Mathe!**

→ Nullhypothese: H_0: $p_0 = 0{,}3$

Stichprobenumfang: $n = 100$

Wahrscheinlichkeit: $p = 0{,}3$

Erwartungswert: $\mu = 30$



	Alternativtest	linksseitiger Hypothesentest	rechtsseitiger Hypothesentest	beidseitiger Hypothesentest
mögliche Aufgabenstellung	„...jemand sagt, dass 40% Mathe lieben...“	„...ob weniger als 30%...“	„...ob mehr als 30%...“	„...ob sich die 30% geändert haben...“
Gegenhypothese	$H_1 : p_1 = 0{,}4$	$H_1 : p_1 < 0{,}3$	$H_1 : p_1 > 0{,}3$	$H_1 : p_1 \neq 0{,}3$

Behauptet jemand etwas anderes, zum Beispiel das 40% Mathe lieben anstatt 30%, wird ein Alternativtest durchgeführt. Neben dem Alternativtest gibt es noch den einseitigen Hypothesentest, der links- oder rechtsseitig sein kann und den beidseitigen Hypothesentest.

In den nächsten Abschnitten werden wir sehen, wie solche Hypothesen aufgestellt werden, was es mit diesen Fehlern auf sich hat und wie wir Hypothesentests mit σ-Regeln und der Tabelle der Normalverteilung durchführen.

7.2 Aufstellen der Hypothesen

Bevor ein Hypothesentest durchgeführt werden kann, müssen die Hypothesen bestimmt werden. Wir unterscheiden folgende Hypothesentest-Arten:

Alternativtest:	$H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p = p_1$
Einseitiger Signifikanztest:	$H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$ $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$
Zweiseitiger Signifikanztest:	$H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$

selbst mit eurem GTR/CAS erzeugen müsst, wie man sie mit Hilfe des Befehls `binomcdf` anzeigen lassen kann. Wir gehen jetzt nur auf das reine Ablesen aus der Tabelle ein, da es im Grunde genommen genau das Gleiche ist, wie wenn ihr sie vorher mit dem Taschenrechner erzeugt.

Wo liegt der Unterschied zum Umgang mit den σ-Regeln? Beim Aufstellen der Entscheidungsregel, also wie der Annahme- und Ablehnungsbereich bestimmt wird. Das ist hier etwas umständlicher. Der restliche Ablauf ist identisch.

7.9.1 Linksseitiger Hypothesentest

1. Hypothesen aufstellen: $H_0 : p \geq p_0;\ H_1 : p < p_0$
2. Festlegung des Stichprobenumfangs n und des Signifikanzniveaus α
3. Bestimmung des Ablehnungsbereiches: $\overline{A} = [0; k]$

   Es muss gelten: $P(X \leq k) \leq \alpha$
4. Entscheidungsregel: Liegt der Stichprobenumfang in $\overline{A}$, wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 beibehalten.

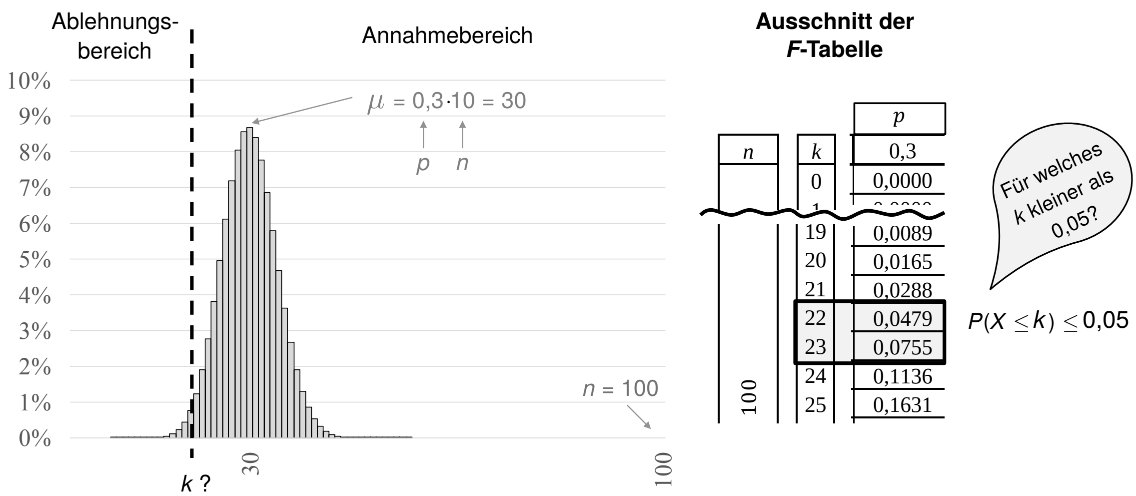
Beispiel Es wird behauptet, dass mindestens 30% der Schüler bei ihrer Mathe-Abi-Klausur spicken. Um diese These zu überprüfen, werden 100 Schüler einer Schule befragt. Das Signifikanzniveau beträgt α = 5%. Leite eine Entscheidungsregel her.

Beispiel linksseitig mit Tabelle

Zunächst stellen wir die Hypothesen auf. Das Signalwort im Aufgabentext ist *mindestens*, so dass wir direkt wissen, dass die Hypothesen wie folgt lauten:

$$H_0 : p_0 \geq 0{,}3; \quad \text{und} \quad H_1 : p_1 < 0{,}3$$

Aus dem Aufgabentext können wir ebenfalls entnehmen, dass der Stichprobenumfang n = 100 ist und das Signifikanzniveau bei 5% liegt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist sehr wichtig, denn sie legt den kritischen Wert fest, ab wann wir die Nullhypothese annehmen. Zur Veranschaulichung ist die Funktion der Binomialverteilung nochmal grafisch dargestellt.



Es gilt jetzt also den kritischen Wert mit Hilfe der passenden F-Tabelle (das war die mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten) zu bestimmen. Der passende Ausschnitt, den ihr in der Klausur