

Inhalt

1	Grundlagen	5
1.1	Grundrechenarten	5
1.2	Mengen	6
1.3	Umgang mit Termen	6
1.4	Rechengesetze	6
1.5	Bruchrechnung	8
1.6	Potenzgesetze	10
2	Lineare Funktionen/Gleichungen	13
2.1	Zeichnung	14
2.2	Eigenschaften linearer Funktionen	14
2.3	Steigungswinkel berechnen	15
2.4	Nullpunkte/Schnittpunkte mit der x -Achse	16
2.5	Schnittpunkte zwischen zwei linearen Funktionen	16
2.6	Schnittwinkel berechnen	17
2.7	Lineare Funktionen mit Punkt-Steigungsform bestimmen	17
2.8	Abstandsbestimmung	18
2.9	Anwendungsorientierte Aufgabe	19
3	Quadratische Funktionen	21
3.1	Verschiebung entlang der y -Achse	21
3.2	Verschiebung entlang der x -Achse	22
3.3	Modifizierung der Steigung	24
3.4	Von der Normalform zur Scheitelpunktform	25
3.5	Nullpunktberechnung von quadratischen Funktionen	26
3.6	y -Achsenabschnitt rechnerisch bestimmen	27
3.7	Schnittpunkte zweier Funktionen	27
3.8	Lagebeziehungen zwischen Parabeln und Geraden	28
4	Ganzrationale Funktionen	29
4.1	Nullstellenberechnung von ganzrationalen Funktion	30
4.2	Berechnung des y -Achsenabschnitts	33
4.3	Änderungsrate	33
4.4	Extremwerte und Wendepunkte	34

4.5	Normalengleichung	38
5	Gleichungssysteme	41
6	Extremwertaufgaben	47
7	Exponentialfunktionen	49
7.1	Basis e	51
7.2	Schnittpunkte mit den Achsen	52
8	Integralrechnung	53
8.1	Ober- und Untersumme	53
8.2	Integrieren	54
8.3	Bestimmung von Flächeninhalten	54
9	Analytische Geometrie	57
9.1	Grundlagen	57
9.2	Linearkombination	61
9.3	Geradengleichungen im Raum	62
9.3.1	Punktprobe	63
9.3.2	Schnittpunkt zweier Geraden	63
9.3.3	Schnittwinkel	64
9.4	Ebenen erstellen	64
9.4.1	Lageuntersuchung in der Ebene	65
10	Beschreibende Statistik	67
10.1	Merkmale und Skalentypen	67
10.2	Darstellbarkeit von Daten	68
10.3	Absolute und relative Häufigkeiten	69
10.4	Wichtige Lagemaße	70
10.5	Erstellung eines Boxplots	72
11	Stochastik	73
11.1	Zufallsprozesse	73
11.2	Baumdiagramm	75
11.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	76
11.4	Zufallsfunktionen - Zufallsvariablen	78
11.5	Verteilungsparameter einer diskreten Zufallsvariablen	79
11.6	Bernoulliverteilung	80
11.7	Binomialverteilung	81
11.8	Entscheidungsverfahren	83
A	Lösungen	87

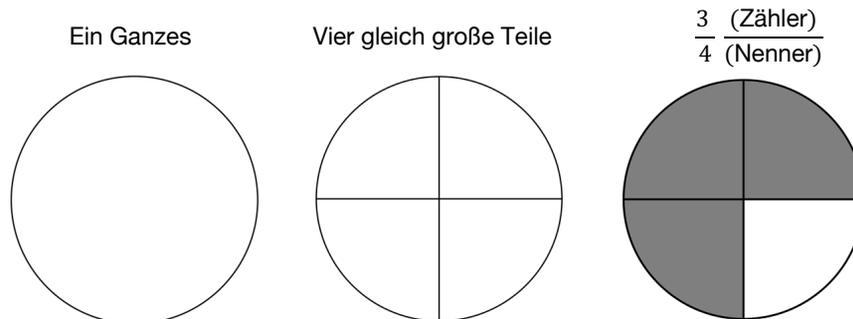
1.5 Bruchrechnung



Grundlagen

Ein Bruch besteht aus einem Nenner (steht unter dem Bruchstrich) und einem Zähler (steht über dem Bruchstrich). Der Nenner gibt an, wie viele Teile es von einem Ganzen gibt und der Zähler beschreibt, wie viele Teile davon effektiv genommen wurden.

Beispiel: $\frac{3}{4}$ $\left[\begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Nenner} \end{array} \right]$



Wie auch bei ganzen Zahlen müssen wir bei Brüchen Rechenregeln beachten:

- Erweitern: Wir erweitern einen Bruch, indem wir sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) mit der gleichen Zahl multiplizieren. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

- Kürzen: Wir kürzen einen Bruch, indem wir sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) durch die gleiche Zahl teilen. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow{9} \frac{9 \div 9}{27 \div 9} = \frac{1}{3}$$

- Gemischter Bruch \leftrightarrow Unechter Bruch: Ein gemischter Bruch (Ganze Zahl und Bruch, z.B. $2\frac{1}{4}$) können wir nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler $>$ Nenner, der unechte Bruch lässt sich auch zu einem gemischten Bruch umschreiben) umwandeln:

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

2 Lineare Funktionen/Gleichungen

Lineare Funktionen sind dir vermutlich auch als Geradengleichungen bekannt. Somit gibt der Name bereits an, um welche Art des Graphen es sich handelt, nämlich eine Gerade. Wir können lineare Funktionen demnach im Koordinatensystem als Geraden darstellen.



Übersicht

Im Allgemeinen hat eine lineare Funktion immer die folgende Gestalt:

$$y = m \cdot x + b$$

mit m als Steigung und b als y -Achsenabschnitt

A.2 Um diese Erkenntnis zu festigen, schauen wir uns die nachfolgenden Funktionen an und bestimmen die Steigung sowie den y -Achsenabschnitt:

$$y = f(x) = 2x + 3$$

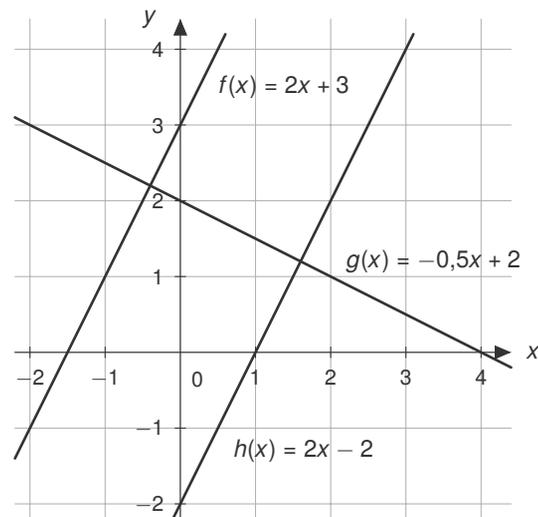
- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y -Achse ($\dots | \dots$)

$$y = g(x) = -0,5x + 2$$

- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y -Achse ($\dots | \dots$)

$$y = h(x) = 2x - 2$$

- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y -Achse ($\dots | \dots$)



Nachdem wir nun erkannt haben, wie wir die Steigung und den y -Achsenabschnitt bestimmen können, besteht die Frage darin, wie wir unsere Erkenntnisse zeichnerisch umsetzen können.

4 Ganzrationale Funktionen

Eine **ganzrationale Funktion** (oder Polynomfunktion) hat die allgemeine Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit einer natürlichen Zahl n und den reellen Zahlen a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 .

- Die **höchste Potenz** gibt Ordnung und maximale Anzahl der Nullstellen an.
- Mit dem **Grenzwertverhalten** können wir den Verlauf von Funktionen bestimmen. Dazu gibt es vier Fallunterscheidungen:



Übersicht

ungerade Potenzen	gerade Potenzen
verläuft von links unten nach rechts oben für	verläuft von links oben nach rechts oben für
$a_n > 0$	$a_n > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
verläuft von links oben nach rechts unten für	verläuft von links unten nach rechts unten für
$a_n < 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- **Symmetrieverhalten**

Achsensymmetrie

$$f(x) = f(-x)$$

Beispiel: $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

Merke: Alle Potenzen sind gerade.

Punktsymmetrie

$$g(-x) = -g(x)$$

Beispiel: $g(x) = 0,5x^3$

Merke: Alle Potenzen sind ungerade.

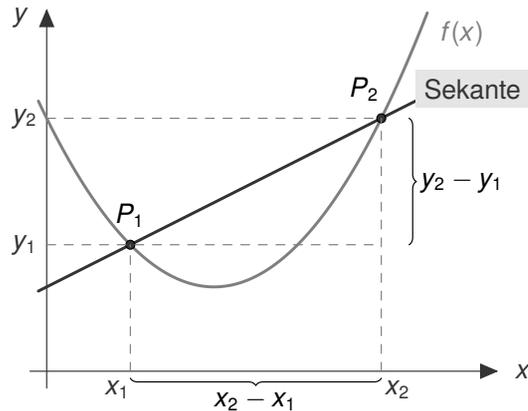


Symmetrie

Zur Erinnerung:

$$m_S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.}$$

$$m_S = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



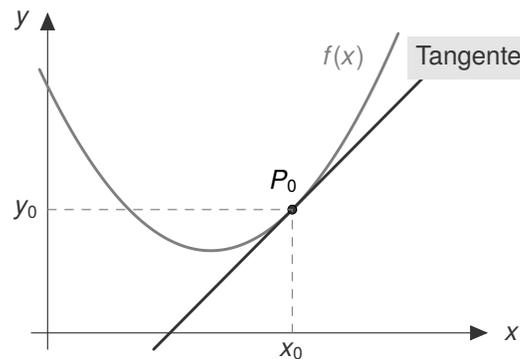
Steigung der Tangente

Bilden wir den Grenzwert gegen 0 des Differenzquotienten, erhalten wir den Differentialquotienten:

$$m_T = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ist der Abstand zwischen x und x_0 sehr klein, können wir die Steigung der Tangente mit der Ableitung an der Stelle x_0 berechnen.

Generell berührt eine *Tangente* eine Funktion $f(x)$ in einem Punkt P_0 . Die Steigung der Tangente m_T beschreibt die Steigung in einem beliebigen Punkt x_0 . Im Sachzusammenhang gesehen beschreibt die Steigung die momentane Änderung.



von Sekante
zur Tangente
(Teil 2)



von Sekante
zur Tangente
(Teil 3)

4.4 Extremwerte und Wendepunkte



Ableitung

Um Extremwerte und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen bestimmen zu können, müssen wir die ersten drei Ableitungen bilden.

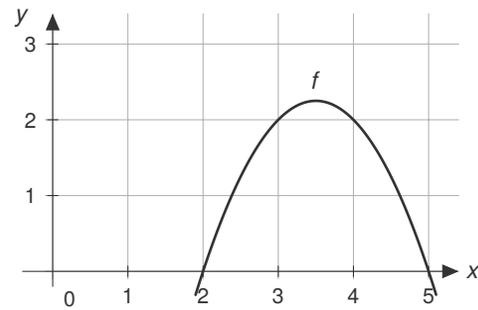
Ableitungen

- $f(x) = ax^n$
- $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- $f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot ax^{n-1-1}$
- $f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-1-1) \cdot ax^{n-1-1-1}$

Beispiel: Die eben genannten Regeln lassen sich wie folgt anwenden:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x, \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 8, \quad f''(x) = 6x - 12, \quad f'''(x) = 6$$

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ (siehe Abbildung) und es soll die Fläche berechnet werden, die von dem Graph und der x -Achse eingeschlossen wird. Zunächst berechnen wir die Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Das sind gleichzeitig unsere Integrationsgrenzen. Es folgt für die Fläche

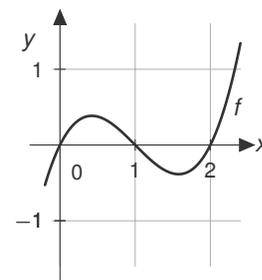


$$\begin{aligned} \int_2^5 -x^2 + 7x - 10 \, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x \right]_2^5 \\ &= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7 \cdot 5^2}{2} - 10 \cdot 5 \right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^2}{2} - 10 \cdot 2 \right) = 4,5 \text{ [FE]} \end{aligned}$$

zwischen Graph und x -Achse im Intervall von [2, 4]

Beispiel: In der nebenstehenden Abbildung soll die Fläche einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, 2]$ bestimmt werden.

$$\int_0^2 f(x) \, dx = 0$$



gibt hierbei nicht den gesuchten Flächeninhalt an, sondern den Integralwert!

Aus diesem Grund ist die Berechnung der Nullstellen wichtig. Da bei der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ eine Nullstelle bei $x = 1$ vorliegt, also innerhalb der angegebenen Integrationsgrenzen, gibt es einen Vorzeichenwechsel und ein Teil des Graphen muss unterhalb der x -Achse liegen. Tipp: Teilfläche A_1 von unterer Grenze zur Nullstelle und Teilfläche A_2 von Nullstelle zu oberer Grenze berechnen. Es folgt mit

$$A_1 = \left| \int_0^1 f(x) \, dx \right| = 0,25 \text{ [FE]} \quad \text{und} \quad A_2 = \left| \int_1^2 f(x) \, dx \right| = | -0,25 | = 0,25 \text{ [FE]}$$

der gesuchte Flächeninhalt $A_{ges} = 0,25 + 0,25 = 0,5 \text{ [FE]}$.

zwischen zwei Graphen

Wenn f und g zwei Funktionen sind, die auf dem Intervall $[a; b]$ stetig sind und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, dann ist die Fläche, die von beiden Funktionen eingeschlossen wird

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = [F(x) - G(x)]_a^b = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$



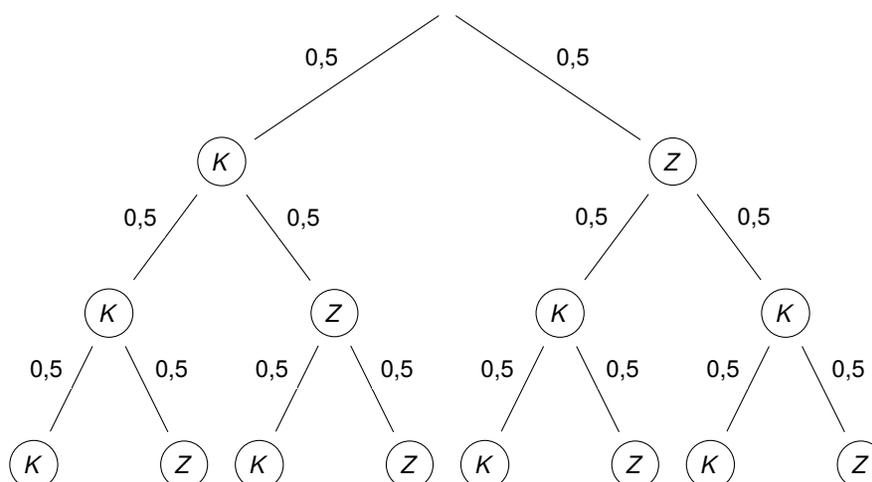
zwischen
2 Graphen

11.2 Baumdiagramm

Zunächst untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit, beim dreifachen Münzwurf zweimal Kopf (K) und einmal die Zahl (Z) zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeit, Kopf oder Zahl zu werfen, beträgt jeweils $P(K) = P(Z) = 0,5$. Diese Werte tragen wir in einem Baumdiagramm ein.



Einstieg



Um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können, müssen wir wissen, wie wir diese Wahrscheinlichkeiten eines Baumdiagrammes berechnen. Dies geht mit Hilfe der **Pfadregeln**:



Pfadregeln

- **1. Pfadregel:** Um die Wahrscheinlichkeit für einen ganz bestimmten Versuchsausgang zu erhalten, müssen die Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades **multipliziert** werden.
- **2. Pfadregel:** Soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das mehrere Versuchsausgänge umfasst, berechnet werden, müssen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Versuchsausgänge **addiert** werden.

Da die Reihenfolge in unserem Beispiel egal ist, also ob wir zuerst Zahl oder Kopf werfen, müssen wir alle möglichen Versuchsausgänge aus dem Baumdiagramm ablesen und mit der ersten Pfadregel bestimmen:

$$P(K, K, Z) = P(K, Z, K) = P(Z, K, K) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$$

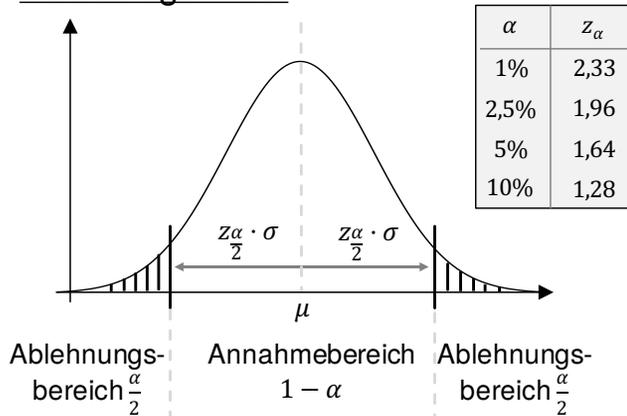
Mit der zweiten Pfadregel können wir dann die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass das Ereignis A (2 Mal Kopf, 1 Mal Zahl) eintritt:

$$P(A) = P(K, K, Z) + P(K, Z, K) + P(Z, K, K) = 0,375 \approx 37,5\%$$

Dieses Zufallsexperiment ist mit dem Ziehen von Zahlen aus einer Urne mit Zurücklegen vergleichbar. Auf jeder Stufe des Würfeln können alle möglichen Ereignisse eintreten.

Übersicht der verschiedenen Hypothesentests

Beidseitiger Test

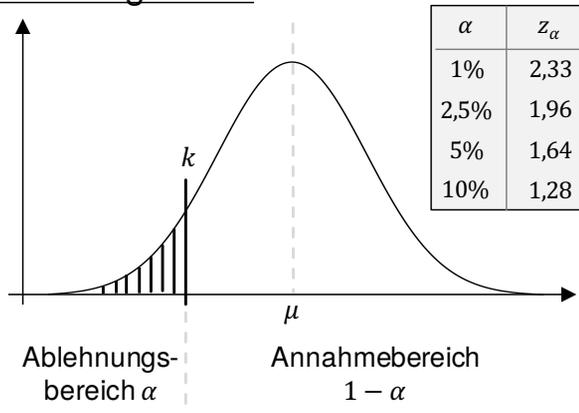


Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir nicht $z_{0,05} = 1,64$ sondern den Wert für $\alpha = 2,5\%$, also $z_{0,025} = 1,96$.

Warum? Weil sich der Ablehnungsbereich i.H.v. 5% links und rechts aufteilt! In Summe lehnen wir natürlich $2,5\% + 2,5\% = 5\%$ ab.

Der Annahmebereich würde lauten:
 $A = [\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$

Linksseitiger Test



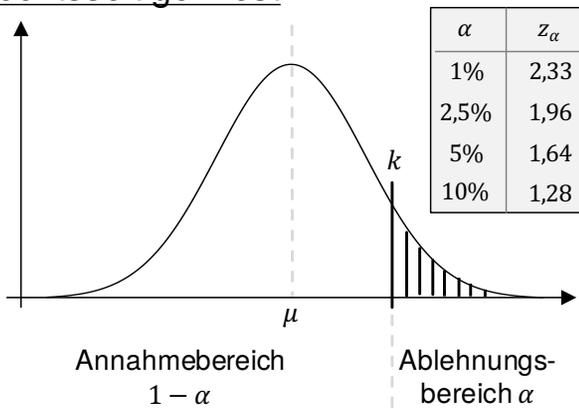
Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir $z_{0,05} = 1,64$.

Warum? Weil sich der Ablehnungsbereich i.H.v. 5% nur auf den linken Bereich bezieht und nicht aufgeteilt werden muss.

Der Ablehnungsbereich würde lauten:

$$\bar{A} = [0; \mu - 1,64\sigma]$$

Rechtsseitiger Test



Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir $z_{0,05} = 1,64$.

Warum? Weil sich der Ablehnungsbereich i.H.v. 5% nur auf den rechten Bereich bezieht und nicht aufgeteilt werden muss.

Der Ablehnungsbereich würde lauten:

$$\bar{A} = [\mu + 1,64\sigma; n]$$