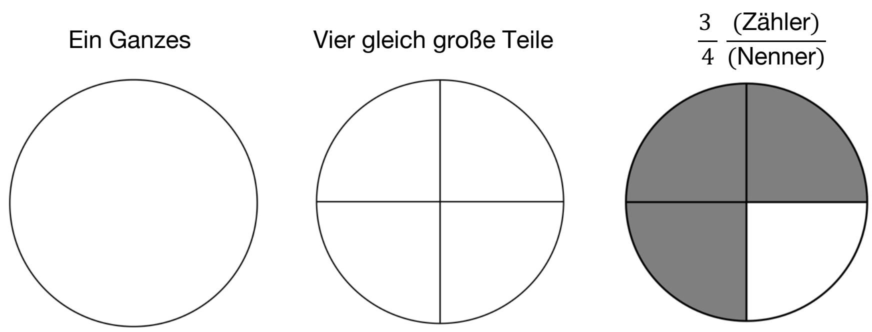
Inhalt

1.5 Bruchrechnung

Grundlagen

Ein Bruch besteht aus einem Nenner (steht unter dem Bruchstrich) und einem Zähler (steht über dem Bruchstrich). Der Nenner gibt an, wie viele Teile es von einem Ganzen gibt und der Zähler beschreibt, wie viele Teile davon effektiv genommen wurden.

Beispiel: $\frac{3}{4} \left[\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right]$



Wie auch bei ganzen Zahlen müssen wir bei Brüchen Rechenregeln beachten:

- Erweitern: Wir erweitern einen Bruch, indem wir sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) mit der gleichen Zahl multiplizieren. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

- Kürzen: Wir kürzen einen Bruch, indem wir sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) durch die gleiche Zahl teilen. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow[9]{} \frac{9 \div 9}{27 \div 9} = \frac{1}{3}$$

- Gemischter Bruch $\leftrightarrow$ Unechter Bruch: Ein gemischter Bruch (Ganze Zahl und Bruch, z.B. $2\frac{1}{4}$) können wir nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler > Nenner, der unechte Bruch lässt sich auch zu einem gemischten Bruch umschreiben) umwandeln:

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

2 Lineare Funktionen/Gleichungen

Lineare Funktionen sind dir vermutlich auch als Geradengleichungen bekannt. Somit gibt der Name bereits an, um welche Art des Graphen es sich handelt, nämlich eine Gerade. Wir können lineare Funktionen demnach im Koordinatensystem als Geraden darstellen.

Übersicht

> Im Allgemeinen hat eine lineare Funktion immer die folgende Gestalt:
>
> $$y = m \cdot x + b$$
>
> mit m als Steigung und b als y-Achsenabschnitt

A.2 Um diese Erkenntnis zu festigen, schauen wir uns die nachfolgenden Funktionen an und bestimmen die Steigung sowie den y-Achsenabschnitt:

$y = f(x) = 2x + 3$

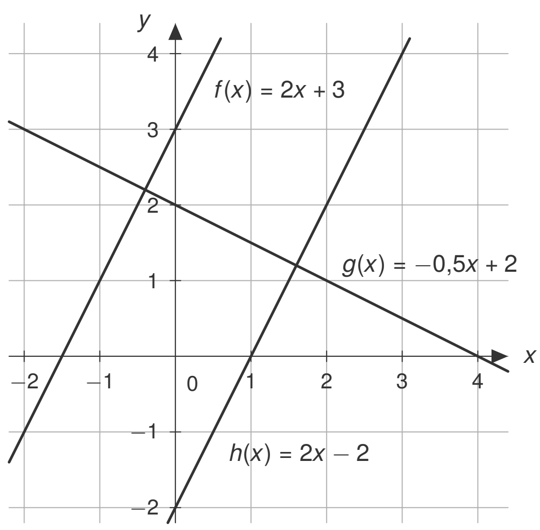
- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y-Achse $(\dots|\dots)$

$y = g(x) = -0{,}5x + 2$

- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y-Achse $(\dots|\dots)$

$y = h(x) = 2x - 2$

- Steigung $m = \dots$
- Schnittpunkt mit y-Achse $(\dots|\dots)$



Nachdem wir nun erkannt haben, wie wir die Steigung und den y-Achsenabschnitt bestimmen können, besteht die Frage darin, wie wir unsere Erkenntnisse zeichnerisch umsetzen können.

4 Ganzrationale Funktionen

Eine **ganzrationale Funktion** (oder Polynomfunktion) hat die allgemeine Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit einer natürlichen Zahl n und den reellen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

- Die **höchste Potenz** gibt Ordnung und maximale Anzahl der Nullstellen an.
- Mit dem **Grenzwertverhalten** können wir den Verlauf von Funktionen bestimmen. Dazu gibt es vier Fallunterscheidungen:

Übersicht

ungerade Potenzen	**gerade Potenzen**
verläuft von links unten nach rechts oben für	verläuft von links oben nach rechts oben für
$a_n > 0$	$a_n > 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
verläuft von links oben nach rechts unten für	verläuft von links unten nach rechts unten für
$a_n < 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- **Symmetrieverhalten**

Symmetrie

Achsensymmetrie

$$f(x) = f(-x)$$

Beispiel: $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
Merke: Alle Potenzen sind gerade.

Punktsymmetrie

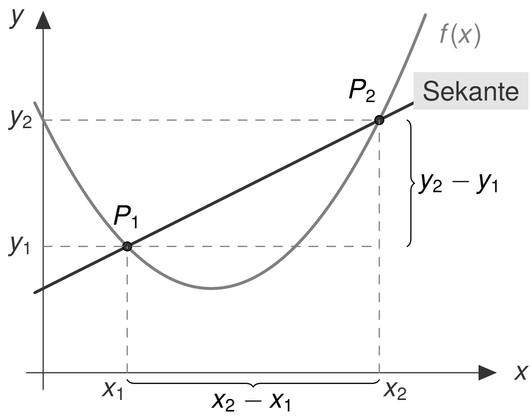
$$g(-x) = -g(x)$$

Beispiel: $g(x) = 0{,}5x^3$
Merke: Alle Potenzen sind ungerade.

Zur Erinnerung:

$$m_S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.}$$

$$m_S = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Steigung der Tangente

von Sekante zur Tangente (Teil 2)

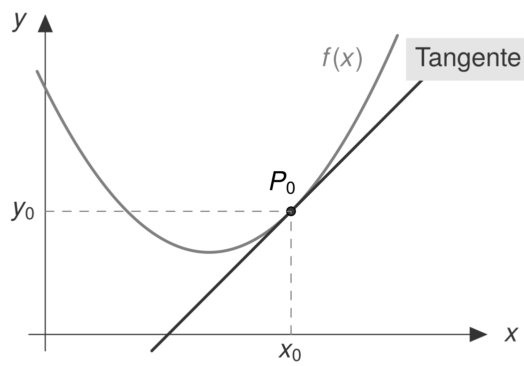
Bilden wir den Grenzwert gegen 0 des Differenzquotienten, erhalten wir den Differentialquotienten:

$$m_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ist der Abstand zwischen x und x_0 sehr klein, können wir die Steigung der Tangente mit der Ableitung an der Stelle x_0 berechnen.

von Sekante zur Tangente (Teil 3)

Generell berührt eine *Tangente* eine Funktion $f(x)$ in einem Punkt P_0. Die Steigung der Tangente m_T beschreibt die Steigung in einem beliebigen Punkt x_0. Im Sachzusammenhang gesehen beschreibt die Steigung die momentane Änderung.



4.4 Extremwerte und Wendepunkte

Ableitung

Um Extremwerte und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen bestimmen zu können, müssen wir die ersten drei Ableitungen bilden.

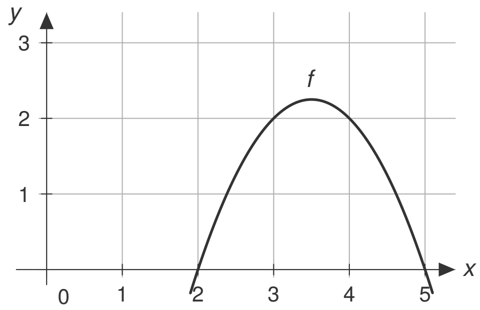
Ableitungen

- $f(x) = ax^n$
- $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- $f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot ax^{n-1-1}$
- $f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-1-1) \cdot ax^{n-1-1-1}$

Beispiel: Die eben genannten Regeln lassen sich wie folgt anwenden:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x, \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 8, \quad f''(x) = 6x - 12, \quad f'''(x) = 6$$

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ (siehe Abbildung) und es soll die Fläche berechnet werden, die von dem Graph und der x-Achse eingeschlossen wird. Zunächst berechnen wir die Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Das sind gleichzeitig unsere Integrationsgrenzen. Es folgt für die Fläche



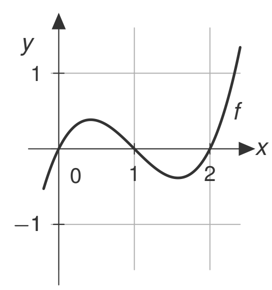
$$\int_2^5 -x^2 + 7x - 10 \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x \right]_2^5$$
$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7 \cdot 5^2}{2} - 10 \cdot 5 \right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^2}{2} - 10 \cdot 2 \right) = 4{,}5 \text{ [FE]}$$

zwischen Graph und x-Achse im Intervall von $[2, 4]$

Beispiel: In der nebenstehenden Abbildung soll die Fläche einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, 2]$ bestimmt werden.

$$\int_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

gibt hierbei nicht den gesuchten Flächeninhalt an, sondern den Integralwert!



Aus diesem Grund ist die Berechnung der Nullstellen wichtig. Da bei der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ eine Nullstelle bei $x = 1$ vorliegt, also innerhalb der angegebenen Integrationsgrenzen, gibt es einen Vorzeichenwechsel und ein Teil des Graphen muss unterhalb der x-Achse liegen. Tipp: Teilfläche A_1 von unterer Grenze zur Nullstelle und Teilfläche A_2 von Nullstelle zu oberer Grenze berechnen. Es folgt mit

$$A_1 = \left| \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right| = 0{,}25 \text{ [FE]} \quad \text{und} \quad A_2 = \left| \int_1^2 f(x) \, \mathrm{d}x \right| = |-0{,}25| = 0{,}25 \text{ [FE]}$$

der gesuchte Flächeninhalt $A_{ges} = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ [FE].

zwischen zwei Graphen

Wenn f und g zwei Funktionen sind, die auf dem Intervall $[a; b]$ stetig sind und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, dann ist die Fläche, die von beiden Funktionen eingeschlossen wird

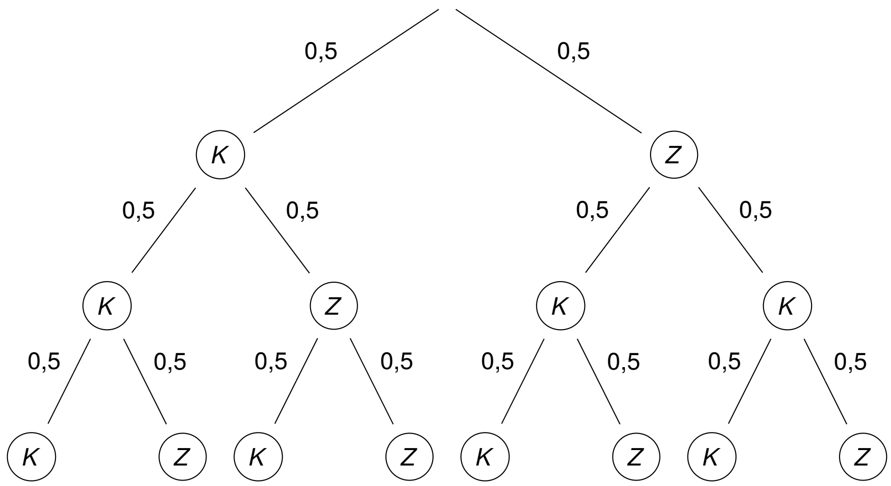
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x = [F(x) - G(x)]\big|_a^b = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$

zwischen
2 Graphen

11.2 Baumdiagramm

Zunächst untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit, beim dreifachen Münzwurf zweimal Kopf (K) und einmal die Zahl (Z) zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeit, Kopf oder Zahl zu werfen, beträgt jeweils $P(K) = P(Z) = 0{,}5$. Diese Werte tragen wir in einem Baumdiagramm ein.

Einstieg



Um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können, müssen wir wissen, wie wir diese Wahrscheinlichkeiten eines Baumdiagrammes berechnen. Dies geht mit Hilfe der **Pfadregeln**:

Pfadregeln

- **1. Pfadregel**: Um die Wahrscheinlichkeit für einen ganz bestimmten Versuchsausgang zu erhalten, müssen die Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades **multipliziert** werden.
- **2. Pfadregel**: Soll die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das mehrere Versuchsausgänge umfasst, berechnet werden, müssen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Versuchsausgänge **addiert** werden.

Da die Reihenfolge in unserem Beispiel egal ist, also ob wir zuerst Zahl oder Kopf werfen, müssen wir alle möglichen Versuchsausgänge aus dem Baumdiagramm ablesen und mit der ersten Pfadregel bestimmen:

$$P(K,K,Z) = P(K,Z,K) = P(Z,K,K) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$$

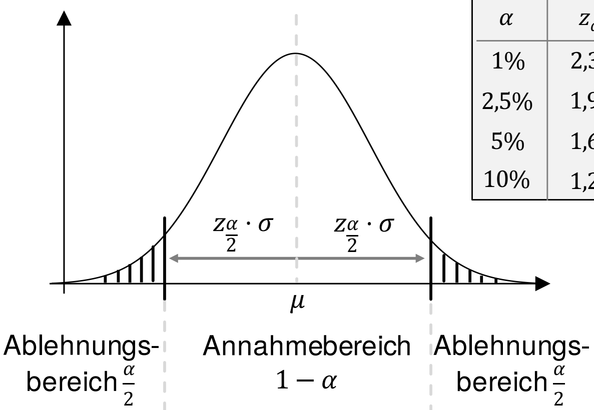
Mit der zweiten Pfadregel können wir dann die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass das Ereignis A (2 Mal Kopf, 1 Mal Zahl) eintritt:

$$P(A) = P(K,K,Z) + P(K,Z,K) + P(Z,K,K) = 0{,}375 \approx 37{,}5\%$$

Dieses Zufallsexperiment ist mit dem Ziehen von Zahlen aus einer Urne mit Zurücklegen vergleichbar. Auf jeder Stufe des Würfelns können alle möglichen Ereignisse eintreten.

Übersicht der verschiedenen Hypothesentests

Beidseitiger Test



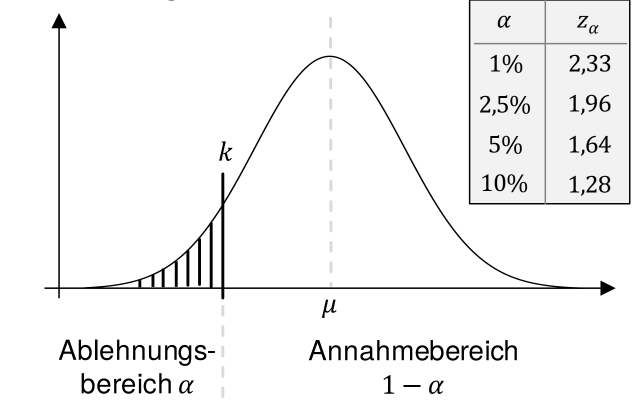
α	z_α
1%	2,33
2,5%	1,96
5%	1,64
10%	1,28

Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir nicht $z_{0,05} = 1{,}64$ sondern den Wert für $\alpha = 2{,}5\%$, also $z_{0,025} = 1{,}96$.

Warum? Weil sich der Ablehnungs-bereich i.H.v. 5% links und rechts aufteilt! In Summe lehnen wir natürlich 2,5%+2,5%=5% ab.

Der Annahmebereich würde lauten:
$A = [\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$

Linksseitiger Test



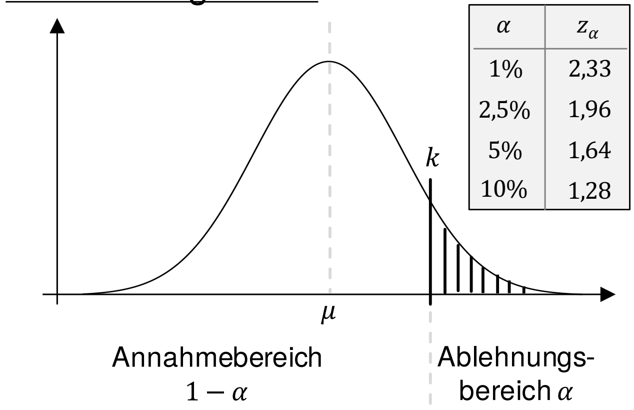
α	z_α
1%	2,33
2,5%	1,96
5%	1,64
10%	1,28

Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir $z_{0,05} = 1{,}64$.

Warum? Weil sich der Ablehnungs-bereich i.H.v. 5% nur auf den linken Bereich bezieht und nicht aufgeteilt werden muss.

Der Ablehnungsbereich würde lauten:
$\bar{A} = [0; \mu - 1{,}64\sigma]$

Rechtsseitiger Test



α	z_α
1%	2,33
2,5%	1,96
5%	1,64
10%	1,28

Wenn $\alpha = 5\%$ ist, verwenden wir $z_{0,05} = 1{,}64$.

Warum? Weil sich der Ablehnungs-bereich i.H.v. 5% nur auf den rechten Bereich bezieht und nicht aufgeteilt werden muss.

Der Ablehnungsbereich würde lauten:
$\bar{A} = [\mu + 1{,}64\sigma; n]$