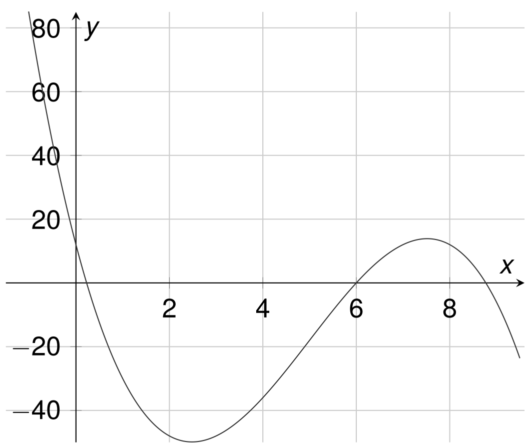
Inhalt

1 am Beispiel einer Abi-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g \in \mathbb{R}$, deren Graph G_g in nebenstehender Abbildung dargestellt ist. Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt:



G_g hat bei der Nullstelle $x = 6$ eine Tangente G_t mit $t : y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ und besitzt den Wendepunkt $W(5| - 18)$.

Teilaufgabe 1

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Skizziere den Graphen $G_{g'}$ der 1. Ableitungsfunktion von g in ein geeignetes Koordinatensystem und gebe die maximalen Monotonieintervalle der ersten Ableitungsfunktion g' an.

Zur Bestimmung des Funktionsterms $g(x)$ ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(I)} & 216a + 36b + 6c + d & = & 0 \\
\text{(II)} & 125a + 25b + 5c + d & = & -18 \\
\text{(III)} & 108a + 12b + c & = & 16 \\
\text{(IV)} & 30a + 2b & = & 0
\end{array}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Die Extremstellen der Funktion g werden die Nullstellen der Ableitungsfunktion g'. Das können wir direkt aus der NEW-Regel folgern:

zu 2. $f(x) = \dfrac{3}{x^{\mathbf{2}}} + 1 = 3 \cdot x^{\mathbf{-2}} + 1$ (Der Bruchstrich ist zum Minis mutiert)

$f'(x) = -6x^{-3} + 1$

(Achtung, die Hochzahl wird gefühlt größer, wenn wir von negativen Zahlen 1 abziehen)

$F(x) = -3x^{-1} + 1x = -\dfrac{3}{x} + x$

zu 3. $f(x) = \sqrt[\mathbf{3}]{2x} = (2x)^{\frac{1}{\mathbf{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} \cdot (2x)^{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \cdot (2x)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot (2x)^{\frac{4}{3}}$$

Kategorie B hingegen läuft mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} (u(v(x)))' &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \\ U(v(x)) &= \tfrac{U(v(x))}{v'(x)} \qquad \text{für lineare } v(x) \end{aligned}$$

Demnach folgt für unsere Beispiele:

zu 4. $f(x) = \frac{1}{2}e^{4x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{4x} \cdot (4x)' = \frac{1}{2}e^{4x} \cdot 4 = \frac{4}{2}e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$F(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{4x}}{4} = \frac{e^{4x}}{8}$$

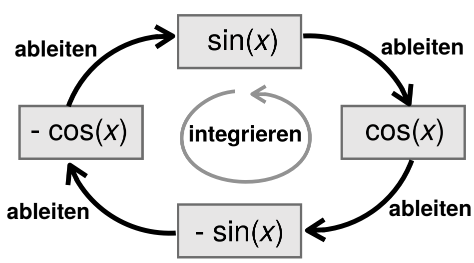
zu 5. $f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(3x) \cdot (3x)' = 2 \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 6 \cdot \cos(3x)$$

$$F(x) = \frac{-2 \cdot \cos(3x)}{3}$$

Sinus und Cosi-
nus ableiten

Sinus und Cosinus sind eine Besonderheit und bilden mit Ihren Auf- und Ableitungen den *circle of death*:



2.2 Wozu brauchen wir Ableitungen und Integralrechnung?

Die erste Ableitung wird benötigt für Tangentensteigungen und eventuell für Monotonie.
Die zweite Ableitung sagt uns, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt und wie die Kurve gekrümmt ist - links oder rechts.

In ableiten

Aufgabe 5: Logarithmusfunktionen[1,2]

a) $f(x) = \ln(2 + 3x^2)$
b) $f(x) = \ln(2x^2 + x)$
c) $f(x) = \ln(4x^2 - 2x + 1)$
d) $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$
e) $f(x) = 2x \cdot \ln(4 + x)$
f) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$
g) $f(x) = (2x - 3) \cdot \ln(3x + 2)$
h) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln(x^2 + 1)$
i) $f(x) = \ln(x^2 + t)$

Aufgabe 6: Gebrochene Exponentialfunktionen[3,4]

a) $f(x) = \frac{3}{1+e^x}$
b) $f(x) = \frac{4}{1-e^{-x}}$
c) $f(x) = \frac{x}{2+e^{3x}}$
d) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{1+e^x}$

Aufgabe 7: Gebrochene trigonometrische Funktion[3,4]

a) $f(x) = \frac{8x^2}{2x^3+6\sin(x)}$
b) $f(x) = \frac{x^2}{2+\cos(x)}$

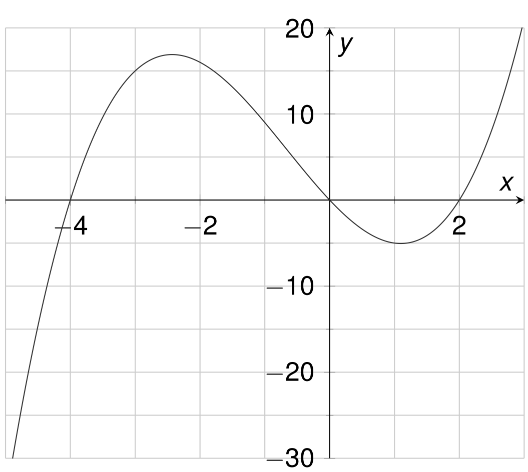
Aufgabe 8: Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen[3,4]

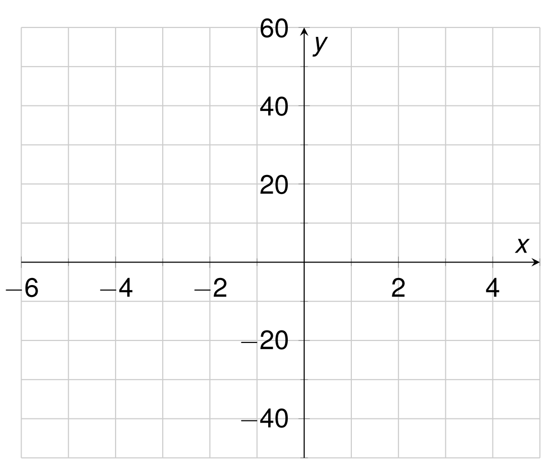
a) $f(x) = \sin(e^x + 1)$
b) $f(x) = \cos(2e^{-x} + 1)$
c) $f(x) = \sin(2e^x + 3)$
d) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$
e) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \cdot \cos(2x)$

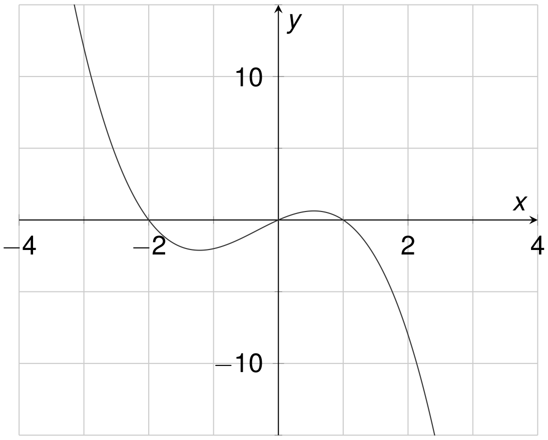
Aufgabe 9: Kurvendiskussion am Schaubild

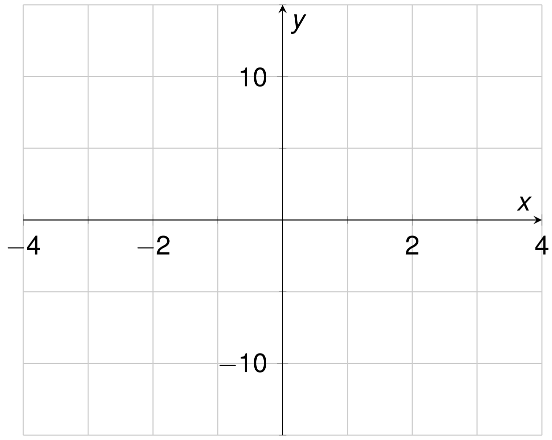
Zeichne zu den Schaubildern ein mögliches Schaubild für Stammfunktion und Ableitungsfunktion ein und entwickle einen möglichen Funktionsterm!

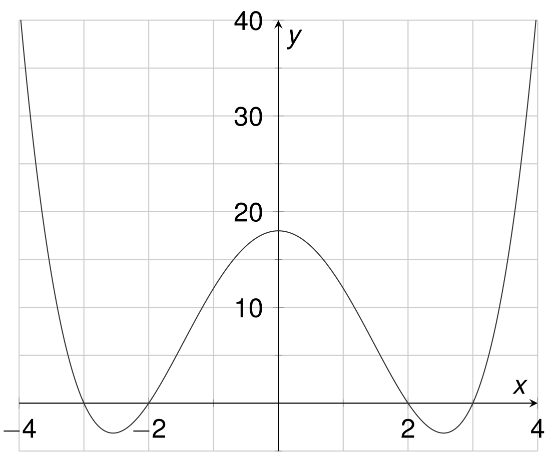
Hinweis: Manchmal musst du Punkte und/oder Steigungen schätzungsweise ablesen.

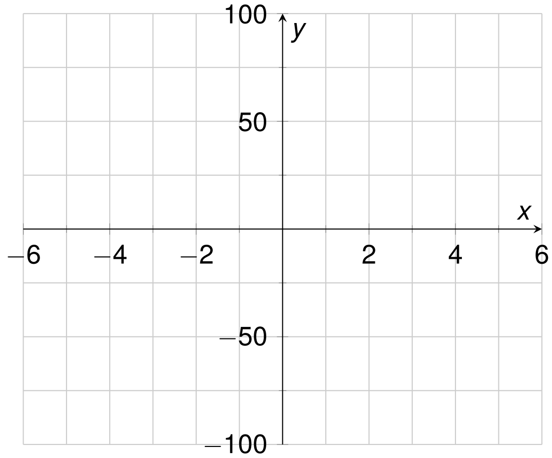


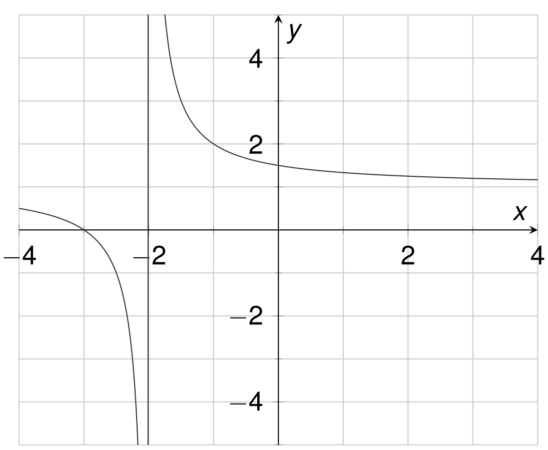


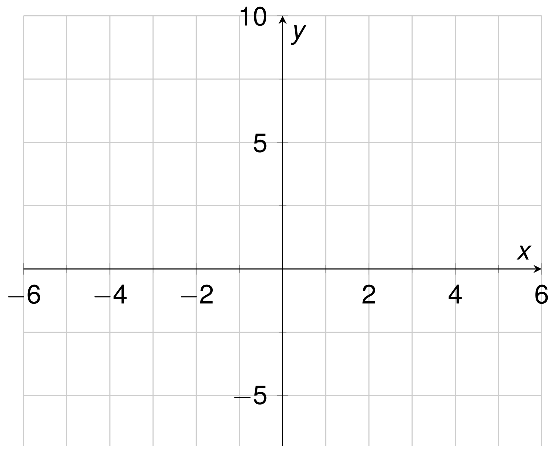

y
10
x
−4
−2
2
4
−10


y
10
x
−4
−2
2
4
−10


40
y
30
20
10
x
−4
−2
2
4


100
y
50
x
−6
−4
−2
2
4
6
−50
−100


y
4
2
x
−4
−2
2
4
−2
−4


10
y
5
x
−6
−4
−2
2
4
6
−5

Der Betrag $|\ldots|$ hat nichts mit dem Betrag aus der Analysis zu tun, wo $|-1| = +1$ ist.

Nun gilt es, im Fachabitur mehr zu bestimmen als die Länge eines Vektors. Häufig ist die Lage von verschiedenen Vektoren zueinander zu bestimmen. Schnappen wir uns daher

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

7.1.3 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Stell dir vor, eine Freundin und du laufen in die gleiche Richtung auf eurem Sportplatz, aber nicht gleich weit. Wie könnten wir eure Bewegungs-Vektoren vergleichen?

Einstieg

Nun ja, zum einen könnten wir uns verdeutlichen, dass ihr beide erstmal zusammen geht und du am Ende deines Vektors stehen bleibst, während sie weitergeht. Sagen wir nochmal so weit. Also wenn du 2 m vor gegangen bist, geht sie 4 m vor; du bewegst dich 1 m nach rechts, sie 2 m usw.

In unserem Beispiel haben wir

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wie wir auf den zweiten Blick erkennen können, kann jede Zeile des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ mit $\cdot(-2)$ gerechnet werden und wir erhalten $\vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (-2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-2) \\ -3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren sind also Vielfache zueinander und zeigen somit in die gleiche Richtung. Sie sind parallel. Wir schreiben:

$$(-2) \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{b}$$

Damit sind $\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b}$ linear abhängig. Nun geht das Ganze aber noch weiter und wir können einen dritten Vektor dazu nehmen, sagen wir einen Ball.

Drei Vektoren werden linear abhängig genannt, wenn sie sich in einer Ebene befinden. Also wenn zwei Spieler sich auf dem Feld bewegen und der Ball beim Spielen landet und nicht darüber oder mathematisch denkbar darunter liegt.

3 Vektoren untersuchen

Beispiel: Die Probe der drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Geraden und Ebenen

Gegeben sind die Punkte $A(3|1|2), B(4|7|3)$ und $C(4|0|-1)$ sowie die Geraden

$$g_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gib jeweils eine Ebenengleichung in Parameterform und Koordinatenform an, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

a) Die Ebene E verläuft durch die Punkte A, B und C.

b) Es gilt $A \in E$ und $g_1 \subset E$.

c) Die Ebene E wird von den Geraden g_1 und g_2 aufgespannt.

d) Die Ebene E enthält den Punkt B und verläuft parallel zur $x_1 - x_2$-Ebene.

e) Die Ebene E steht senkrecht auf g_1 und enthält den Punkt A.

Aufgabe 3: Gegenseitige Lage

Gegeben sind die Punkte $A(3|1|6), B(4|7|4)$ und $C(4|0|c)$ die Geraden

$$g_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, g_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_3 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R}$ sowie die Ebenen

$$E : 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0, \quad F : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \sigma, \varphi \in \mathbb{R},$$

$$G : 2x_1 + ax_2 - 2ax_3 - 8a = 0$$

a) Untersuche die Lage des Punktes A zu den Geraden g_1 und g_2.

b) Untersuche die Lage des Punktes A zur Ebene E.

c) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_3 sowie g_2 und g_3.

d) Wie muss c gewählt werden, damit Punkt $c \in E$ gilt?

e) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist g_1 orthogonal zur Ebene G?

f) Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden g von E und F.

g) Bestimme die Spurpunkte von g_1.

h) Bestimme die Spurgerade von E in der $x_1 - x_2$-Ebene.

10 am Beispiel einer Abi-Aufgabe

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Vor einem Tennisturnier werden die verwendeten Tennisbälle hinsichtlich der Qualität geprüft. Aus Erfahrung weiß man, dass 90% der Bälle den richtigen Durchmesser aufweisen (D), 10% Fehler in der Form ($\overline{F}$) sowie 20% Fehler in der Elastizität ($\overline{E}$) zu beklagen sind. Alle Fehler treten unabhängig voneinander auf. Im Zufallsexperiment wird ein beliebig aus- gewählter Ball auf die drei möglichen Fehler untersucht.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments.

Gegeben seien folgende Ereignisse:

- E_1: „Der Ball weist genau 2 Fehler auf.“
- $E_2 = \{D\,F\,E, D\,F\,\overline{E}, \overline{D}\,F\,E, \overline{D}\,F\,\overline{E}\}$

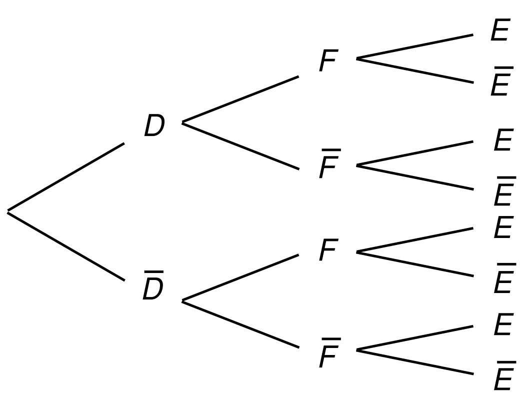
Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein kurioser Themenbereich in der Mathematik, da oft starke Schüler hier schwächeln und schwache Schüler glänzen. Ich stand selbst lange auf Kriegsfuß mit Stochastik und werde daher noch mehr auf verschiedene Verständnisfallen eingehen als sonst.

Wie so oft soll auch hier durch das Tennisturnier ein fragwürdiger Bezug zur Realität geschaffen werden. Tatsächlich werden Bälle aber mithilfe von Maschinen auf verschiedene Parameter getestet. Hier darf es nun um Durchmesser, Form und Elastizität gehen.

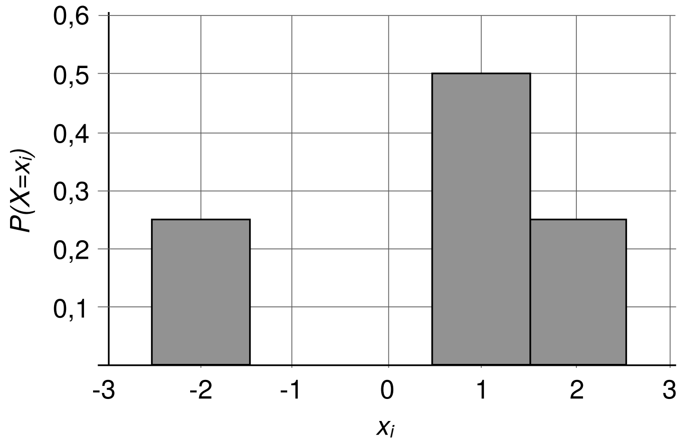
Baumdiagramm

Pfadregeln



Hierbei soll D, F und E jeweils bedeuten, dass die jeweilige Eigenschaft passt. Zur Kontrolle müssen alle Ergebnisse zusammen 1 ergeben.

Histogramm:
Die Flächeninhalte der Rechtecke haben jeweils den Wert $W(x_i) = P(X = x_i)$. Die Flächensumme aller dieser Rechtecke ergibt 1 (da insgesamt immer die Wahrscheinlichkeit von 100% erreicht wird)!



11.1.2 Maßzahlen einer diskreten Zufallsvariablen

Der Erwartungswert

Definition:
X sei eine diskrete Zufallsvariable und nehme die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (wobei $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) an.

Wir bezeichnen die Zahl $\mu = E(X)$ dann als Erwartungswert der diskreten Zufallsvariablen X:

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

oder $$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i), \; i = 1, 2, \ldots$$

Anmerkung:

- Der Erwartungswert drückt das aus, was auf lange Sicht gesehen erwartet werden kann. Ist X beispielsweise der Gewinn bei einem Glücksspiel, dann gibt μ den durchschnittlichen Gewinn bei n Spielen an.

Beispiel: Bender wirft eine Laplace-Münze solange, bis Kopf erscheint. Höchstens wirft er die Münze allerdings viermal. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an.

Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne den Erwartungswert $E(X)$. Es folgt:

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$