Inhalt

1 Mathematischer Werkzeugkoffer

So verrückt der Name dieses Kapitels auch klingen mag, so wichtig ist es für dich!

Schüler & Studenten, die mit mathematischen Aufgabenstellungen kaum Probleme haben und auch neue Inhalte auf diesem Gebiet schnell verstehen, können nicht unbedingt besser „rechnen" als diejenigen, die dieses „Talent" nicht haben. Viel entscheidender ist die Fähigkeit, die richtigen Ansätze zu finden, mit welchen sich Probleme lösen lassen. Einer der inoffiziellen und bekanntesten Sätze (in dem sich jetzt wohl so mancher wiederfindet) mag folgender sein:

„Ah! Den Lösungsweg und die Rechnung verstehe ich jetzt, aber ich wäre nie darauf gekommen!"

Bei manchen Themengebieten kannst du hiergegen „anlernen", indem du möglichst alle unterschiedlichen Aufgabenstellungen durchgehst und auf diese Weise in Prüfungen nicht überrascht werden kannst. Sicherlich ist das ratsam! Der beste Weg ist das aber im Allgemeinen nicht. Denn oft hat es den faden Beigeschmack des Auswendiglernens durch die Bearbeitung bekannter Aufgabenstellungen. Es gibt viele Gebiete, in denen das Beschriebene eben nicht funktionieren kann. Die Fülle an möglichen Aufgabenstellungen ist oft zu groß.

> Das beste Beispiel, an dem das Ganze klar wird, ist das einfache Rechnen. Jeder hat (schon in der Grundschule) **Rechentechniken** wie z. B. Addieren und Multiplizieren gelernt und kann diese **anwenden**.
>
> Niemand käme auf die wahnsinnige Idee, alle möglichen Rechnungen und deren Ergebnisse auswendig zu lernen. Das ergibt schlicht und einfach keinen Sinn, denn es existieren unendlich viele Rechenaufgaben.

Dieses Kapitel soll dir also eine kleine Hilfe sein, den Blick auf das „große Ganze" zu bewahren. Denn es geht immer um folgendes:

Das Ziel ist es, Gelerntes zu abstrahieren und auf alle möglichen Gebiete (auch themenübergreifend) anwenden zu können!

***Strukturen/Muster*, die einem bekannt vorkommen, in Aufgabenstellungen erkennen und so Lösungsansätze finden!**

Um das realisieren zu können, kannst du dir im Kopf einen **mathematischen Werkzeugkoffer** anlegen. In diesem befinden sich alle mathematischen Tools, die abstrakt eingesetzt werden können. Das können Techniken (wie z. B. das einfache Rechnen mit Zahlen, Partialbruchzerlegungen oder Ableiten von Funktionen) sein oder auch Formeln (wie z. B. der Satz des Pythagoras, die binomischen Formeln oder die pq-Formel), die für jegliche Anwendungsfälle gebraucht werden. Manches ist mit Sicherheit fließend und lässt sich nicht 100%ig klar abgrenzen, was aber gar nicht so schlimm ist, solange es hilft, das große Ganze im Blick zu behalten.

In den beiden folgenden Unterkapiteln haben wir versucht, diesen „Koffer“ möglichst mit allem zu füllen, was du für die Veranstaltung brauchst (und standardmäßig auch sonst wissen solltest). Achtung: Hier sind natürlich „Werkzeuge“ aus allen Kapiteln dieses Heftes enthalten (sonst würde das Ganze wenig Sinn ergeben). Damit dient es dir natürlich auch als eine Kompaktübersicht!

Sich die Inhalte deiner Veranstaltung auf diese Weise zu strukturieren, zu merken und auf Anwendungsgebiete anzuwenden, sollte den gesamten Inhalt enorm vereinfachen.

1.1 Zu beherrschende Techniken

In dieser Rubrik befinden sich Rechentechniken/-gesetze, Techniken zum Auftrennen von Polynomen und Brüchen, Verfahren zum Auflösen von (Un)Gleichungen und dergleichen. Alles, was in den sonstigen Kapiteln ausführlich beschrieben ist, wird hier nur zusammenfassend erwähnt, damit du einen Überblick hast!

1.1.1 Rechengesetze

Potenzgesetze

Wurzelgesetze

Logarithmus-gesetze, ab 1:02

Ganz bewusst ordnen wir die Rechengesetze nicht den Formeln zu. Sie müssen nämlich angewendet werden. Und das intuitive Anwenden zählt eher zu einer Fähigkeit, die du besitzen solltest!

Jeweils für Basen ≥ 0, Argumente („Radikant“) unter der Wurzel ≥ 0 und Argumente im Logarithmus > 0 gelten die folgenden Gesetze:

Potenzgesetze	Wurzelgesetze	Logarithmusgesetze
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\sqrt[n]{x^a} = x^{\frac{a}{n}}$	$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$		$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

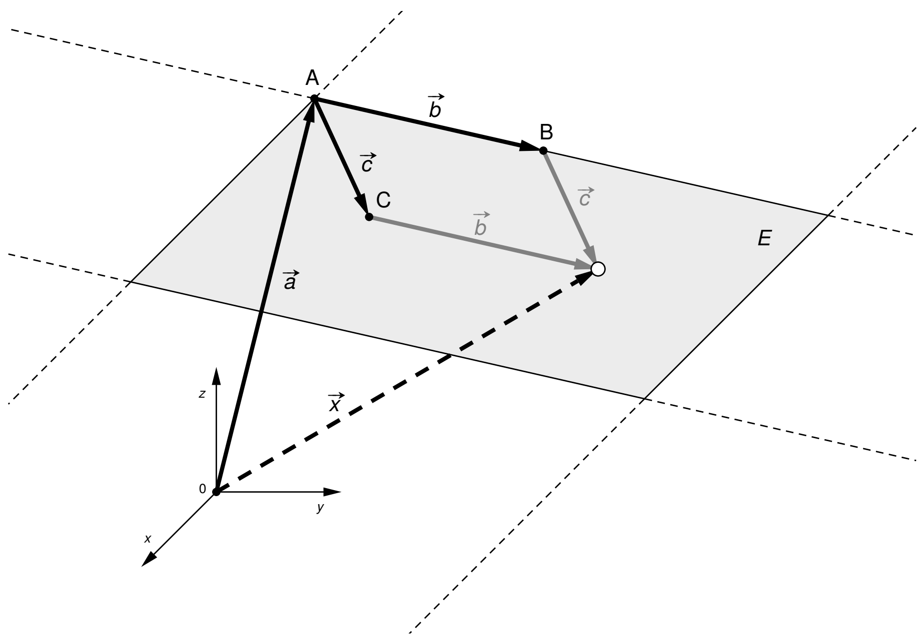
Fakultäten kürzen

Wichtig z. B. zum korrekten Anwenden von Konvergenzkriterien von Reihen:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{=n!} \cdot (n+1)} = \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n!}{(n+3)!} = \frac{n!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$



Die Ebene als Objekt ist natürlich unendlich groß. Der gefärbte Teil stellt bloß einen Abschnitt der Ebene anschaulich dar.

Die RV's $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dürfen keine Vielfachen voneinander sein, da sonst nur eine Gerade gebildet wird!

Ebenen aufstellen:

$P = (1, 2, 3), \quad Q = (-2, 0, 5), \quad R = (-1, 1, 2)$

Ebene in Parameterform, in der alle drei Punkte P, Q und R liegen:

$$E_1 : \ \vec{x} = \overrightarrow{0P} + \lambda\overrightarrow{QP} + \mu\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Normalenform:

Zum Verständnis:

$$E : \ \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \tag{2.11}$$

P=(1, 2, 3),   Q=(3, 5, 4),   R=(2, -2, 3)

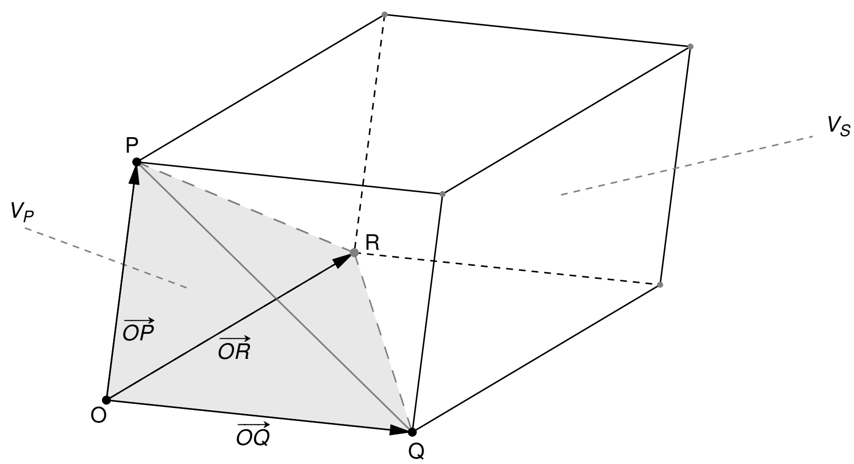
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_P = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{138}$$

$$\Rightarrow A_D = \frac{1}{2} A_P = \frac{\sqrt{138}}{2}$$

2.2.3 Volumen Spat und Pyramide im $\mathbb{R}^3$

Vier Punkte (O,P,Q und R) im Raum (im $\mathbb{R}^3$) bilden eine dreiseitige Pyramide. Drei Vektoren zwischen diesen Punkten können genutzt werden, um hier das Volumen einfach zu errechnen. Entsprechend für ein Spat durch acht Punkte:



- Spat: Volumen V_S eines durch drei Vektoren aufgespannten Spats entspricht dem Betrag der Determinanten der zugehörigen Matrix (vgl. Gleichung 2.6)

∗ Alternative Spatprodukt: $V_S = \left| \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) \right|$

- Pyramide/Tetraeder: Volumen $V_P = \frac{1}{6} \cdot V_S$

V_S durch Spatprodukt

Es ist vollkommen egal, in welcher Reihenfolge die Vektoren in die Matrix geschrieben oder für das Spatprodukt verwendet werden. Die Reihenfolge würde lediglich am Vorzeichen von V_S etwas ändern. Dieses ist aber durch den Betrag sowieso positiv!

4 Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist im Prinzip eine Auflistung von nummerierten Objekten (hier Zahlen aus $\mathbb{R}$). Die Zuordnungsvorschrift/Bildungsgesetz/Bildungsvorschrift a_n ist dann eine Funktionsvorschrift, in die nur natürliche Zahlen eingesetzt werden dürfen (...die Zuordnungsvorschrift ordnet jeder Zahl aus $\mathbb{N}$ eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zu).

Explizite Folgen: liefern für ein n direkt den gewünschten Wert.

Rekursive Folgen: besitzen (mindestens) einen Startwert und bis zu dem gesuchten n-ten Folgenglied müssen auch alle vorherigen Folgenglieder ausgerechnet werden, da sie rekursiv in die Folge eingesetzt werden.

Unterschied expl./rek. Folge

Explizite Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$

Ersten Folgenglieder: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (leicht zu sehen)

Rekursive Folge: $a_{n+1} = \frac{3+a_n}{2a_n}$, Startwert $a_1 = 1$

Ersten Folgenglieder: $1, 2, \frac{5}{4}, \frac{17}{10}, \frac{47}{34}, \ldots \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}$ (Berechnung in Kap. 4.5.2)

Folgen werden in der Regel immer auf Konvergenz/Divergenz untersucht und Grenzwerte ermittelt.

4.1 Definitionen, Begriffe, Schreibweisen

Die folgenden Begriffe rund um Folgen sollten bekannt sein:

Konvergenz:

Eine Folge ist konvergent, wenn sie einen konkreten Grenzwert besitzt.

Konv./Div.

Divergenz:

Eine Folge ist divergent, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Bestimmt Divergent:

Eine Folge wird bestimmt divergent genannt, wenn diese gegen ∞ oder $-\infty$ strebt. Die Folge divergiert zwar, jedoch weiß man „wohin sie läuft“.

- Bei Brüchen den Nenner vergrößern und/oder den Zähler verkleinern, um die richtige Ungleichungsreihenfolge zu bekommen
- $\sum a_k \geq \sum b_k$ darf so nicht notiert werden, da beide divergieren – in der Regel ∞ sind – und $\infty \geq \infty$ nicht korrekt ist (∞ ist keine Zahl!)

Beispiel: Minorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\,, \quad \text{da } \frac{1}{\sqrt[3]{k}} > \frac{1}{\sqrt[3]{k^3}} = \frac{1}{k} \text{ gilt, ist } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ Minorante.}$$

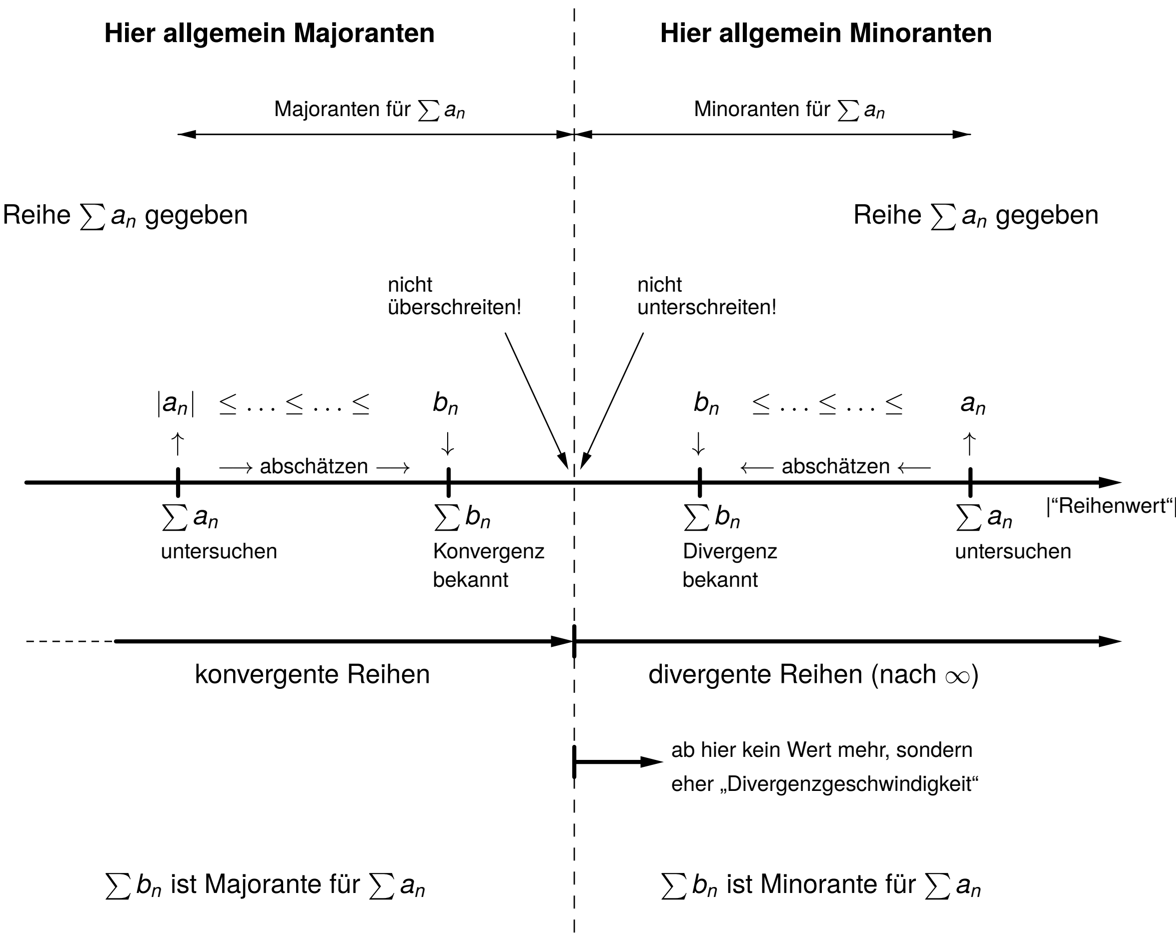
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \text{ divergiert.}$$

Beispiel: Minorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\,, \quad \text{da } \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k} \text{ gilt, ist } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \text{ Minorante.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{ divergiert.}$$

Hier eine Visualisierung der Vorgehensweise beim Majo- und Minorantenkriterium. Das ist rein mathematisch nicht wirklich präzise, aber es sollte dir helfen, die Verfahren besser zu verstehen.



6 Funktionen – Grundlagen

Funktionen werden genutzt, um Objekte einer Menge zu Objekten einer anderen Menge in Relation zu setzen. Das ist eine recht abstrakte Beschreibung dessen, was eine Funktion tut. Wir werden uns bei den Objekten auf reelle Zahlen und bei den Mengen auf Zahlenmengen (Teilmengen von $\mathbb{R}$) beschränken. In Relation setzen bedeutet, dass Funktionen die Zahlen einer Menge in irgendeiner Art und Weise manipulieren und so die Ergebnismenge in Beziehung zur Ausgangsmenge stellen. Funktionen werden folgendermaßen notiert:

$$\begin{aligned} f:\ D \to W\,,\ f(x) = \dots \\ \text{(oder auch } f:\ D \to W\,,\ x \mapsto \dots) \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1 Allgemeines, Begriffe

Die grundlegenden Begriffe aus (6.1) sind:

f – Funktion (oder Abbildung)

Definition: „Eine Funktion ordnet jedem Element aus D *genau ein* Element aus W zu". Die Funktion beinhaltet alles, was nach dem Doppelpunkt kommt. Beachte, dass D und W genauso wichtig für eine Funktion sind, wie das übliche $f(x)$.

D – Definitionsmenge/-bereich

Die Zahlenmenge, aus der die x-Werte (Elemente aus D) genommen werden und in die Funktionsvorschrift eingesetzt werden dürfen. Für jedes $x \in D$ muss es genau ein $y \in W$ geben (vgl. Definition der Funktion).

W – Wertemenge/-bereich

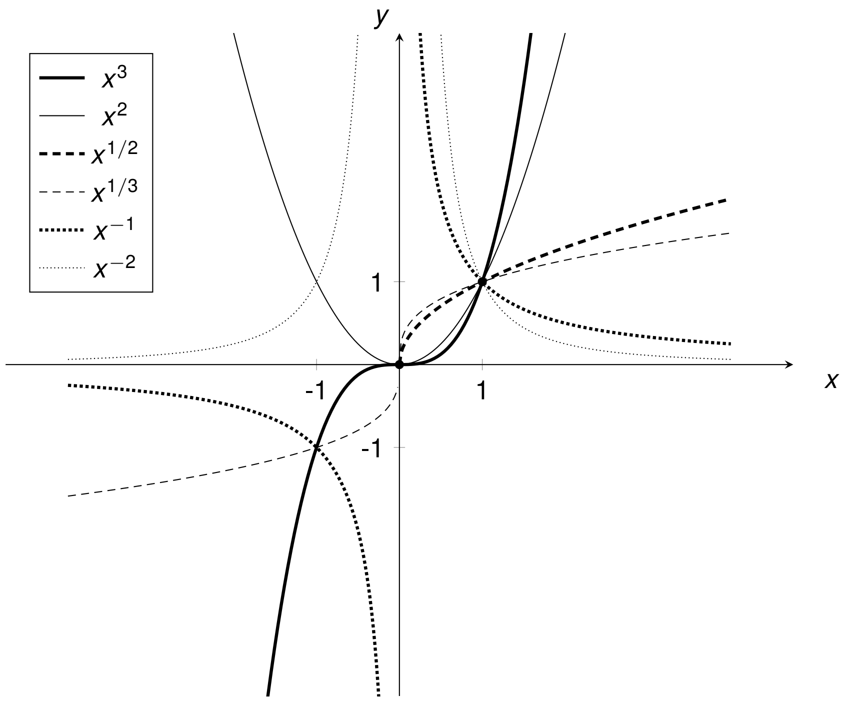
Die Zahlenmenge, in die f alle Zahlen aus D abbilden kann. Hier müssen *mindestens* die Elemente enthalten sein, die man erhält, wenn alle Elemente aus D in $f(x)$ eingesetzt werden. Mathematisch kann das durch $f(D) \subseteq W$ ausgedrückt werden.

> **Beachte: Die Formulierung mit „mindestens" ist enorm wichtig! Denn hieraus ergibt sich eine Eigenschaft von Funktionen, die wir später noch näher erklären werden.**

$f(x)$ oder $x \mapsto \dots$ – Die Funktions-/Abbildungsvorschrift

Die Funktionsvorschrift ist der Teil der Funktion, der Zahlen aus D auf Zahlen aus W abbildet. Hier kann jede Art von Termen stehen, auch mit Fallunterscheidungen für verschiedene x-Intervalle. Also $x_1 \in D$ wird auf $f(x_1) = y_1 \in W$ abgebildet (x_1 und y_1 stehen somit durch f in Relation zueinander).

Graphen



6.2.4 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen beschreiben z. B. Wachstumsvorgänge in der Natur. Allgemein sind sie für alle $a > 0,\ a \neq 1$ definiert:

$$f:\ \mathbb{R} \to (0,\infty)\,,\ f(x) = a^x \quad \text{(Logarithmus von } x \text{ zur Basis } a) \tag{6.23}$$

Normalerweise spricht man von *der* Exponentialfunktion, wenn $a = \mathrm{e}$ gilt, also die klassische e-Funktion.

Charakteristik

Die Exponentialfunktion mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist definiert für $x \in \mathbb{R}$, erreicht aber nur maximal $W = (0,\infty)$. Sie verläuft durch die Punkte

$$(0,1) \quad \text{und} \quad (1,\mathrm{e}) \tag{6.24}$$

e^x ist auf seinem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}$

- streng monoton steigend,
- hat keine Nullstelle,
- und hat ein Grenzverhalten $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Dieses Grenzverhalten dominiert das Grenzverhalten aller Polynome, sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to \infty$. Gezeigt wird das in Kapitel 7.5.

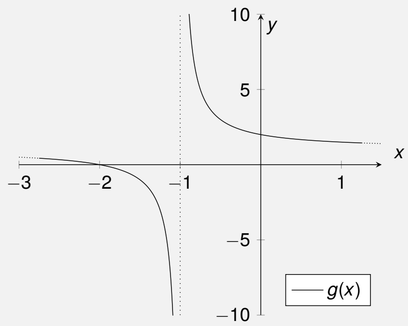
$$g: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x+2}{x+1}, \quad x_0 = -1$$

$\lim\limits_{x \nearrow -1} g(x) = -\infty$ (Zähler positiv, Nenner nähert sich negativ der Null)

$\lim\limits_{x \searrow -1} g(x) = \infty$ (Zähler positiv, Nenner nähert sich positiv der Null)

$\Rightarrow x = -1$ ist eine Polstelle mit Polwechsel von $-\infty$ nach ∞

$\Rightarrow g$ ist trotzdem auf seinem Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ stetig, da es aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.



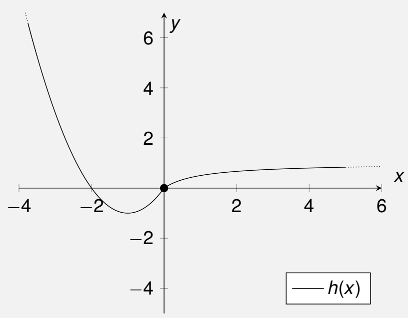
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} h(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} (x+1)^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \searrow 0} h(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$

$h(0) = 0$

$\Rightarrow h$ ist in $x = 0$ stetig (auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, da es aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist).



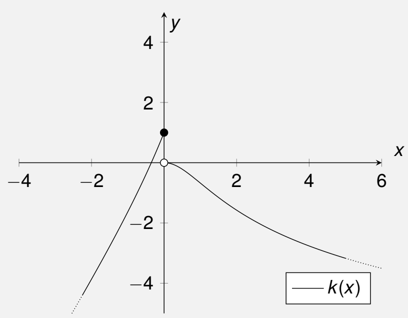
$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = \begin{cases} 2x + e^x & x \leq 0 \\ x - \ln(x^2+1) & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} k(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} 2x + e^x = 0 + e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \searrow 0} k(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x - \ln(x^2+1)$

$= 0 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow h$ ist nicht auf seinem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ stetig (unstetig in $x = 0$ (Sprungstelle); auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ allerdings stetig, da es aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist).



6.4.2 Stetige Erweiterung/Fortsetzung

Grundsätzlich gehen wir hier der Frage nach, ob sich die vorliegende Funktion an gewissen Stellen „reparieren“ lässt mit der Eigenschaft, dass die Funktion dort stetig wird. Umgangssprachlich lässt sich eine Funktion in einem (Häufungs)Punkt x_0 stetig erweitern, wenn sie dort eine Defini-