

Inhalt

1	Allgemeines, sonstige Themen	7
1.1	Wissenswertes	7
1.2	Rechenregeln, Beziehungen	8
1.3	Mengen	9
1.4	Algebraische Begriffe	10
1.5	Gleichungen lösen	11
1.6	LGS lösen	12
1.6.1	Einsetzungsverfahren	14
1.6.2	Gleichsetzungsverfahren	14
1.6.3	Additionsverfahren	15
1.6.4	Gauß-Algorithmus	16
1.7	Ungleichungen	18
1.7.1	Äquivalenzumformungen von Ungleichungen	18
1.7.2	Nicht-Äquivalenzumformungen	19
1.8	Beträge	20
2	Logik	23
2.1	Aussagenlogik	23
2.1.1	Symbolik (Aussageverbindungen)	23
2.1.2	Wahrheitstafel	23
2.1.3	Einbeziehung der Negation	25
2.1.4	Mehr zur Implikation	26
2.1.5	Äquivalenz	26
2.2	Prädikatenlogik	27
3	Vektoren, Analytische Geometrie	29
3.1	Allgemeines, Rechenregeln	29
3.1.1	Vektoren	29
3.1.2	Geraden, Ebenen, Darstellungsformen	32
3.2	Abstandsberechnungen	35
3.3	Schnittwinkelberechnungen	39
3.4	Schnittpunkt-/Schnittgeradenberechnung	40
3.5	Analytische Geometrie im \mathbb{R}^2	44

4	Vollständige Induktion, Folgen, Reihen	47
4.1	Vollständige Induktion	47
4.2	Folgen	52
4.2.1	Definitionen, Begriffe, Schreibweisen	52
4.2.2	Wichtige Folgen	53
4.2.3	Konvergenzkriterien, Rechenregeln	53
4.2.4	Explizite Folgendarstellung	55
4.2.5	Rekursive Folgendarstellung	58
4.3	Reihen	59
4.3.1	Allgemeines	59
4.3.2	Wichtige Reihen	60
4.3.3	Indexverschiebung	60
4.3.4	Nullfolgenkriterium	61
4.3.5	Minoranten-/Majorantenkriterium	62
4.3.6	Quotienten-/Wurzelkriterium	64
4.3.7	Leibnizkriterium	66
4.3.8	Wann welches Kriterium?	67
4.3.9	Potenzreihen	68
5	Komplexe Zahlen	71
5.1	Allgemeines, Rechenregeln, Darstellungen	71
5.1.1	Rechenregeln/-empfehlungen	72
5.1.2	Darstellungen umwandeln	72
5.2	Komplexe Folgen/Reihen	76
6	Funktionen, Differentiation, Integration	79
6.1	Definition, Begriffe	79
6.2	Wichtige Funktionen/Funktionswerte	81
6.3	Stetigkeit	83
6.3.1	Links-/rechtsseitige Grenzwerte	84
6.3.2	Stetige Erweiterung/Fortsetzung	85
6.4	Definitions- und Wertebereich	87
6.4.1	Definitionsbereich bestimmen	88
6.4.2	Wertebereich bestimmen	89
6.5	Ableitungen, Differentiation	89
6.5.1	Differenzierbarkeit	89
6.5.2	Wichtige Ableitungen	91
6.5.3	Ableitungsregeln	91
6.5.4	Extremstellenberechnung	94
6.5.5	Wendestellenberechnung	96
6.5.6	Grenzwerte: Regel von l'hospital	97
6.5.7	Taylorentwicklung	99
6.6	Umkehrfunktionen	101
6.6.1	Nachweis Injektivität	101
6.6.2	Nachweis Surjektivität	102
6.6.3	Bestimmung Umkehrfunktion	103
6.7	Stammfunktionen, Integration	104
6.7.1	Wichtige Stammfunktionen/Rechenregeln	105
6.7.2	Integrierungsregeln	105

7	Ökonomische Funktionen	109
7.1	Wichtige Klassen und deren Eigenschaften	109
7.2	Um welche ökonomische Funktion handelt es sich?	113
7.3	Betriebsgrößen	114
7.3.1	Betriebsminimum	114
7.3.2	Betriebsoptimum	114
7.4	Zusammenhang zwischen Kosten, Erlös, Gewinn und Angebot	116

1 Allgemeines, sonstige Themen

In diesem Kapitel werden wichtige Themen aus der Oberstufe wiederholt und stellen die Grundlage für die weiteren Kapitel dar. Neben korrekten Schreibweisen und was in einer Klausur lieber nicht notiert werden sollte sind auch allgemeine Rechenregeln hier zu finden.

1.1 Wissenswertes

- Symbole und ihre Bedeutung:
 - \exists „es gibt“
 - \forall „für alle“
 - \in „Element aus/von“
 - \wedge „und“ (bei Elementen/Zahlen, nicht bei Mengenverknüpfungen)
 - \vee „oder“ (bei Elementen/Zahlen, nicht bei Mengenverknüpfungen)
 - $:=$ „ist definiert als“
 - \subset „ist Teilmenge von“
- ein kaufmännisches „und“ (&) nie in mathem. Notationen verwenden
- Winkelberechnungen *immer* in Bogenmaß ($2\pi \hat{=} 360^\circ$)
- Wurzelziehen bei Ungleichungen: z.B.

$$(x + 2)^2 > 9$$
$$\Leftrightarrow x + 2 > 3 \vee x + 2 < -3 \quad (\text{nicht } x + 2 > -3)$$

- Bei mehreren Lösungen, z.B. nach Lösen einer pq-Formel:
entweder $x = 1 \vee x = 4$ oder $x_1 = 1 \wedge x_2 = 4$.
Nicht erlaubt ist folgendes: $x = 1 \wedge x = 4$ (da $x = 1 = 4 \frac{1}{2}$)
- Intervallgrenzen: „(,“ offen, „[,]“ zu, z.B. $(1, 2] \rightarrow 1$ nicht im Intervall, 2 schon

2 Logik

2.1 Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein in einer künstlichen oder natürlichen Sprache formulierter Satz, dem sich genau eines der beiden Attribute „wahr“ (1) oder „falsch“ (0) zuordnen lässt. Im mathematischen Sinn ist der Inhalt nicht von Interesse! Eine Aussage entsteht, wenn Elementaraussagen (*Atome*) durch Junktoren miteinander verknüpft werden.

Beispiel Atom: Es regnet.

Nicht-Beispiel für Atom: Ach je.

2.1.1 Symbolik (Aussageverbindungen)

■ Grundbausteine

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| 1. Negation : $\neg A := \bar{A}$ | Sprich: „nicht“ oder „kein“ |
| 2. Konjunktion : $A \wedge B$ | Sprich: „und“ |
| 3. Disjunktion : $A \vee B$ | Sprich: „oder“ |
| 4. Implikation : $A \rightarrow B$ | Sprich: „Wenn..., dann...“ |
| 5. Äquivalenz : $A \leftrightarrow B$ | Sprich: „Genau wenn..., dann...“ |

Durch die Verknüpfung der Aussagen A und B entstehen „neue“ Aussagen, die „wahr“ (1) oder „falsch“ (0) sein können. Das ist davon abhängig, ob die eingehenden Aussagen A und B „wahr“ (1) oder „falsch“ (0) sind.

2.1.2 Wahrheitstafel

- fasst Wahrheitswerte verknüpfter Aussagen zusammen
- häufige Anwendung: aussagenlogische Nachweise
- in klassischer 2-wertiger Logik ist der Grad der Wahrheit entweder 0 oder 1
- Folgende Tabelle gibt für jeden Wahrheitswert der Aussagen A und B das Resultat 2-wertiger Verknüpfungen an:

A	B	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow	\bar{A}	\bar{B}
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Beispiele Wahrheitstafel: Zeige, dass folgende Ausdrücke gelten:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$

A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Antwort: Da in der Spalte unter $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ und $(A \wedge B) \rightarrow C$ alle Wahrheitswerte übereinstimmen, ist der untersuchte Ausdruck wahr.

2. $(A \rightarrow B) \wedge (\bar{B} \vee C) \Rightarrow \bar{C} \rightarrow \bar{B}$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$\bar{B} \vee C$	$\overbrace{(A \rightarrow B) \wedge (\bar{B} \vee C)}^{X:=}$	$\overbrace{\bar{C} \rightarrow \bar{B}}^{Y:=}$	$X \Rightarrow Y$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Antwort: Da in der Spalte unter $X \Rightarrow Y$ nur wahre Aussagen herauskommen (Wahrheitswert 1), ist der untersuchte Ausdruck allgemeingültig.

5 Komplexe Zahlen

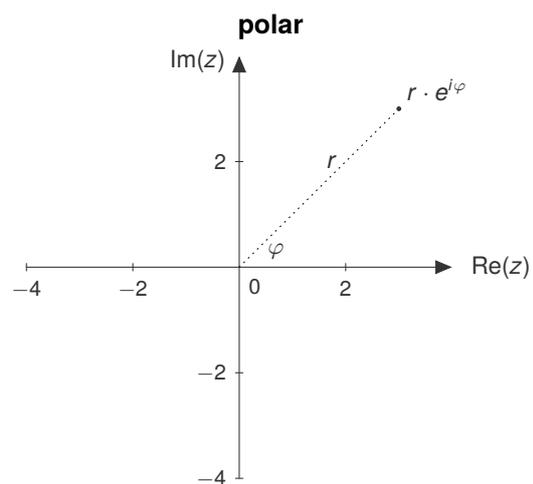
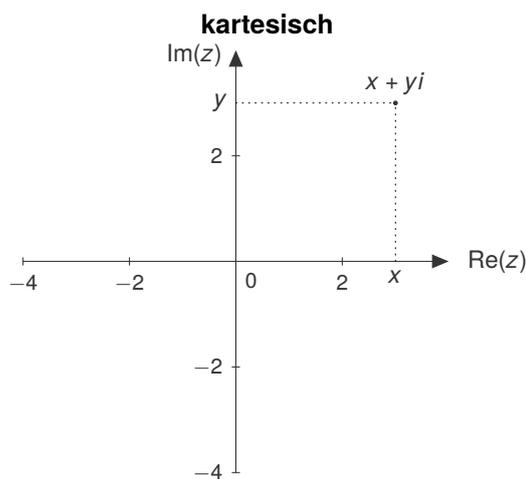
Erweiterung des Zahlenbereichs, um Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können.

5.1 Allgemeines, Rechenregeln, Darstellungen

- Komplexe Zahlen sind idR mit z gekennzeichnet ($z \in \mathbb{C}$)
- Die Zahlen sind auf der komplexen Zahlenebene angeordnet
- $z_1 < z_2$ gibt es hier nicht/ergibt keinen Sinn!
- Die *komplex Konjugierte* von z ist \bar{z} (Spiegelung an der reellen Achse)
- $i^2 = -1$

$$\text{Kartesische Darstellung: } z = x + yi \quad (5.1)$$

$$\text{Polarform: } z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (5.2)$$



- x : Realteil von z ($\text{Re}(z) \in \mathbb{R}$)
- y : Imaginärteil von z ($\text{Im}(z) \in \mathbb{R}$)
- i : imaginäre Einheit
- $\bar{z} = x - yi$
- r : Betrag von z , $r \in \mathbb{R}^+$
- φ : Winkel zur Re-Achse, $\varphi \in [0, 2\pi)$
- i : imaginäre Einheit
- $\bar{z} = r \cdot e^{i(2\pi - \varphi)}$

5.1.1 Rechenregeln/-empfehlungen

- $i^2 = -1$ elementar für das Rechnen mit komplexen Zahlen
- Rechnen mit $+$, $-$, \cdot genau wie im \mathbb{R} (Re, Im beim Addieren nicht vermischen)
- Betrag einer komplexen Zahl: $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ (vgl. Gl. 5.5)
- Bei Brüchen muss i aus dem Nenner eliminiert werden (mit Hilfe 3. bin. Formel)
- Potenzieren wie in \mathbb{R} (Empfehlung: z ab „hoch 5“ in Polarform)
- Wurzelziehen siehe Gleichung 5.4 (z immer in Polarform)

$$\text{Komplexe e-Funktion: } e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \quad (5.3)$$

$$\text{Komplexes Wurzelziehen: } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.4)$$

Vergl.: Vekt./kompl. Zahl	Vektoren im \mathbb{R}^2	komplexe Zahlen (in \mathbb{C})
Komponenten	x-Komponente	Re(z)
	y-Komponente	Im(z)
Betrag	$ \vec{x} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$ z = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
$+$, $-$, \cdot mit Zahl aus \mathbb{R}	jew. komponentenweise	auch jew. „komponenten“weise

5.1.2 Darstellungen umwandeln

Um die jeweiligen Rechenvorteile zu nutzen, muss man wissen, wie in die jeweilige Darstellung umgerechnet werden kann:

■ Kartesische in die Polarform:

$$r = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \quad (5.5)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{r}\right) & \text{für } \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{r}\right) & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

φ kann auch durch $\arcsin(\dots)$ oder $\arctan(\dots)$ berechnet werden, aber mit $\arccos(\dots)$ muss man 1. nicht großartig auf den Quadranten gucken, in dem die Zahl in der kompl. Zahlenebene liegt und 2. sind so auch die Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 definiert.

■ Polarform in die Kartesische:

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi) \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi) \quad (5.8)$$

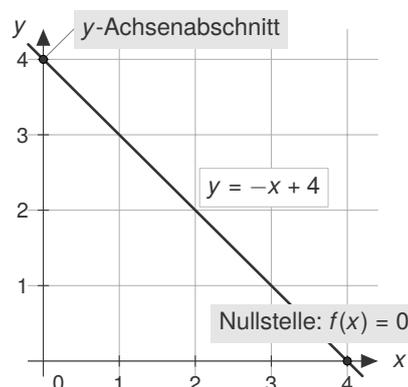
6.2 Wichtige Funktionen/Funktionswerte

Lineare Funktion (Geraden)

Die allgemeine Form für eine lineare Funktion lautet:

$$y = m \cdot x + b \text{ für } m \neq 0 \text{ mit } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Um die Steigung m zu bestimmen brauchen wir zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$. Eine Nullstelle liegt bei $-b/m$.

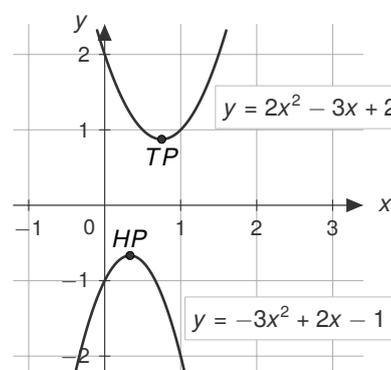


Quadratische Funktion

Die allgemeine Form für eine quadratische Funktion lautet:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ für } a \neq 0$$

Die einfachste quadratische Funktion ist die Normalparabel mit $y = x^2$. Der höchste oder tiefste Punkt einer quadratischen Funktion wird auch Scheitelpunkt S genannt. Die Scheitelpunktform lautet: $y = a \cdot (x - d)^2 + e$ mit $S(d|e)$. Sie besitzt keine, eine oder zwei Nullstellen.

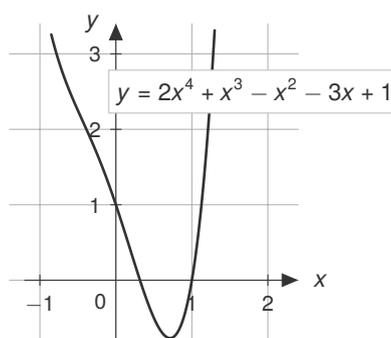


Polynomfunktion

Die allgemeine Form für eine Polynomfunktion (auch ganzrationale Funktion genannt) lautet beim

- 3. Grad: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- 4. Grad: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
- usw.

Grad n beschreibt den höchsten Exponent für x für $a \neq 0$. Es gibt maximal so viele Nullstellen, wie der Grad n der Funktion ist.

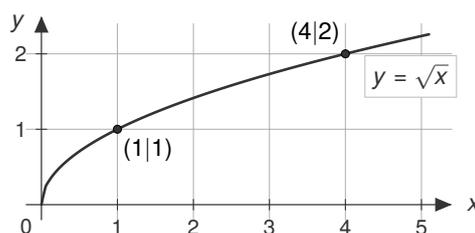


Wurzelfunktion

Die allgemeine Form einer Wurzelfunktion lautet:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \text{ für } x \geq 0$$

mit n als Wurzelexponent. Sie besitzt die einzige Nullstelle bei $x = 0$. Je größer n ist, desto flacher verläuft der Graph ab $x = 1$. Wenn n gerade bzw. ungerade, ist $x \in [0, \infty)$ bzw. $x \in \mathbb{R}$.

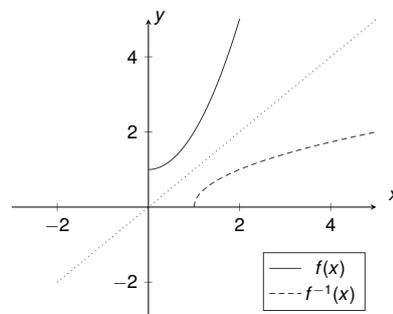


6.6.3 Bestimmung Umkehrfunktion

Wenn Bijektivität nachgewiesen wurde, kann noch die Umkehrvorschrift $f^{-1}(x)$ bestimmt werden (nicht bei allen bijektiven Funktionen ist dies möglich!). Dafür muss $f(y) = x$ gesetzt und auf y umgeformt werden:

z.B. $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f(y) = y^2 + 1 &= x \\ \Leftrightarrow y^2 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{x - 1} =: f^{-1}(x) \\ \Rightarrow f^{-1} : [1, \infty) &\rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} \end{aligned}$$



Kombiniertes Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{e^x}{e^{-x} + 2}$$

Injektivität:

1. f besitzt keine Polstellen, da der Nenner nie Null wird ($e^{-x} + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)
2. f ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar
3. Ableiten:

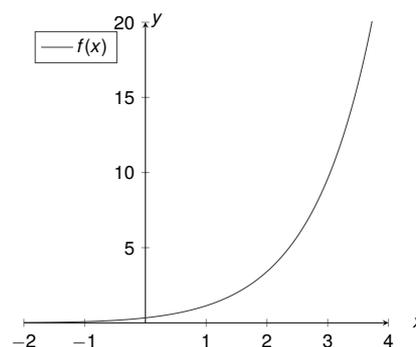
$$f'(x) = \frac{e^x(e^{-x} + 2) - e^x(-e^{-x})}{(e^{-x} + 2)^2} = \frac{1 + 2e^x + 1}{(e^{-x} + 2)^2} = 2 \cdot \frac{e^x + 1}{(e^{-x} + 2)^2}$$

$f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist f streng monoton steigend und deshalb injektiv.

Surjektivität:

1. f ist stetig, da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Der ganze Wertebereich wird von $f(x)$ erreicht und damit ist f surjektiv.



f ist also bijektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion f^{-1}

$$f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \dots$$

(Die Vorschrift $f^{-1}(x)$ lässt sich jedoch nicht analytisch bestimmen.)