Inhalt

1 Zahlen und Größen

1.1 Bruchrechnung

Bruchrechnung ist für viele Schüler ein großes Problem. Aber keine Sorge: Wir werden dir dieses Thema von Grund auf erklären. Sobald du die ersten Kniffe verstanden hast, wird dir das Thema nicht mehr schwerfallen.

Fangen wir ganz vorne an: Was ist ein Bruch? Ein Bruch besteht immer aus einem Zähler (überm Bruchstrich) und einem Nenner (unterm Bruchstrich). **Beispiel**:

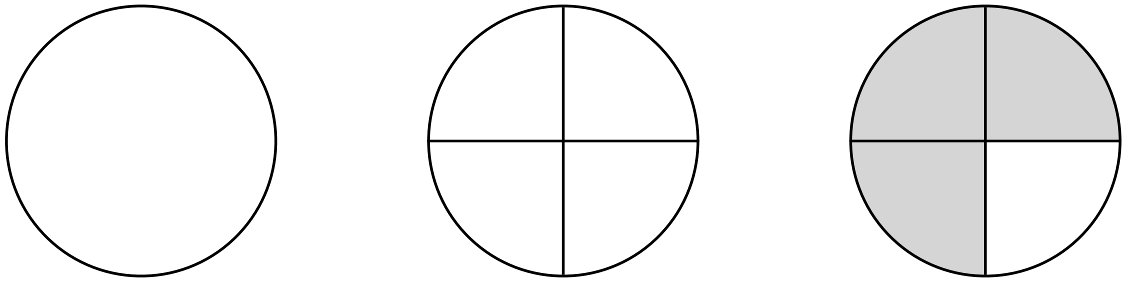
$$\frac{3}{4}\ \frac{\text{(Zähler)}}{\text{(Nenner)}}$$

Einstieg

Der Nenner (unten, im Beispiel die 4) gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird. Das können wir gut an einem Kuchen verbildlichen. Wenn wir uns das untere Bild anschauen, sehen wir zu Beginn einen ganzen Kuchen, der nicht angeschnitten ist. Anschließend wird der Kuchen in 4 Stücke aufgeteilt, sodass 4 gleich große Stücke entstehen. Wenn wir nun einen großen Appetit haben und 3 von diesen 4 Stücken essen, dann nehmen wir $\frac{3}{4}$ des gesamten Kuchens. Warum? Weil der Zähler (oben, im Beispiel die 3) angibt, wie viele Teile vom Ganzen genommen werden.

> **Nenner**: Anzahl, in die ein Ganzes zerlegt wird
>
> **Zähler**: Anzahl, die wir von der Gesamtzahl nehme n

Ein Ganzes | Vier gleich große Teile | $\frac{3}{4}\ \frac{\text{(Zähler)}}{\text{(Nenner)}}$



Im nächsten Schritt werden wir mit den Brüchen rechnen. Keine Angst, das hört sich schlimmer an als es wirklich ist.

Beim Rechnen mit Brüchen gelten die folgenden Regeln:

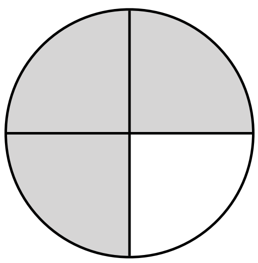
Addieren, erweitern und kürzen

- **Erweitern**: Ein Bruch wird erweitert, indem sowohl der Zähler als auch der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert wird. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

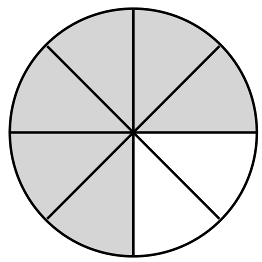
$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

  Beim Erweitern verändert sich die „Wirkung“ des Bruches nicht, damit wird gemeint, dass am Ende genauso viel Kuchen weggenommen wird, wie zuvor. Schauen wir uns wieder den Kuchen an:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{\text{(Zähler)}}{\text{(Nenner)}}$$



$$\frac{3}{4} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$



  Beim linken Kuchen ist die graue Fläche genauso groß wie beim rechten Kuchen, nur die Einteilung ist feiner.

- **Kürzen**: Ein Bruch wird gekürzt, indem sowohl der Zähler als auch der Nenner durch die gleiche Zahl geteilt wird. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow[9]{} \frac{9 : 9}{27 : 9} = \frac{1}{3}$$

  Kürzen ist somit das Gegenteil zum Erweitern. Wir kürzen Brüche, weil mit kleinen Zahlen besser gerechnet werden kann.

Unechte Brüche

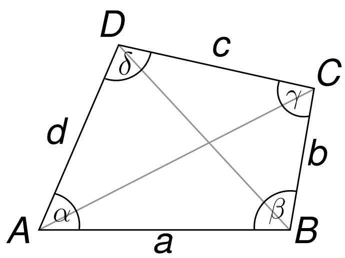
- **Gemischte Zahl $\leftrightarrow$ Unechter Bruch**: Eine gemischte Zahl (ganze Zahl und Bruch z.B. $2\frac{1}{4}$) kann nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler $>$ Nenner) umgewandelt werden:

$$2\frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

  Bei unechten Brüchen ist der Zähler (oben) größer als der Nenner (unten). Das führt dazu, dass wir keinen richtigen Bruch haben, denn ein Bruch beschreibt ja eigentlich nur einen Teil vom Ganzen. Wenn das „Ganze“ zum

<table>
<tr>
<td>

Viereck



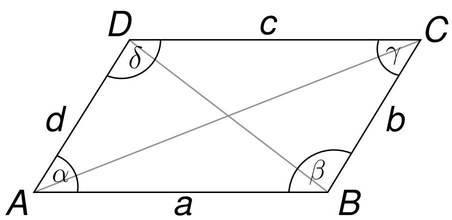
</td>
<td>

Eigenschaften:

- das hier gezeigte Viereck wird auch konvexes Viereck genannt, denn alle Winkel sind kleiner als 180°

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Parallelogramm



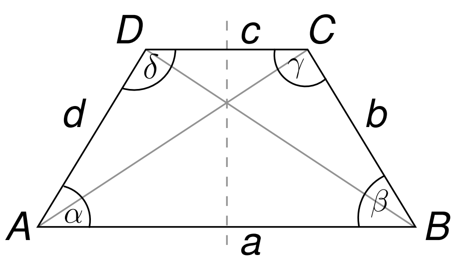
</td>
<td>

Eigenschaften:

- gegenüberliegende Seiten sind
  - parallel: $a \parallel c, b \parallel d$
  - gleich lang: $a = c, b = d$
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß: $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
- die Diagonalen halbieren sich

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Gleichschenkliges Trapez



</td>
<td>

Eigenschaften:

- zwei Seiten sind parallel: $a \parallel c$ (a, c = Grundseite)
- die Winkel an der Grundseite sind gleich groß: $\alpha = \beta$
- die beiden Seiten, die keine Grundseiten sind, sind gleich lang: $b = d$
- die Diagonalen sind gleich lang
- es gibt eine Symmetrieachse (gestrichelte Linie)

</td>
</tr>
</table>

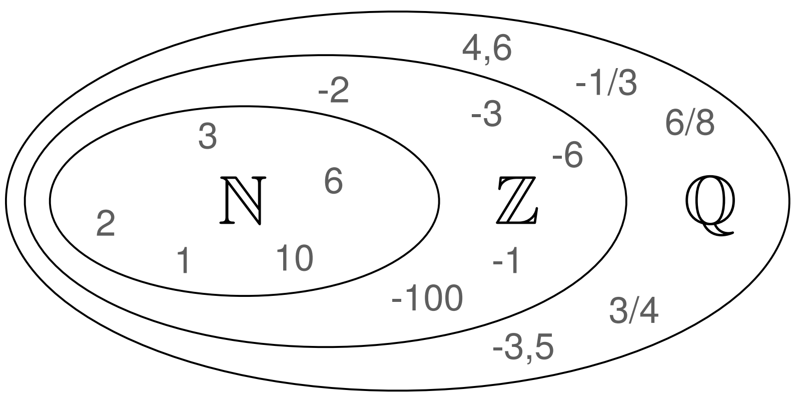
Flächeninhalte

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms lässt sich mit der Grundseite *a* (in deinem Schulbuch kann es z.B. auch *g* sein) und der Höhe *h* bestimmen.

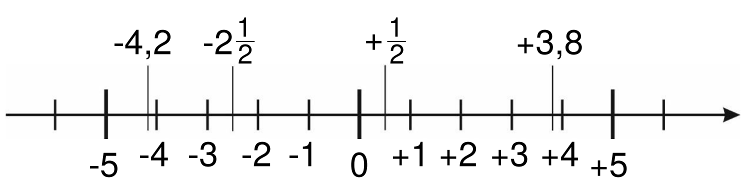
Flächen Übersicht

5 Rationale Zahlen

Zu den rationalen Zahlen gehören alle ganzen Zahlen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$ und zusätzlich alle Bruchzahlen wie z.B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ oder $\frac{10}{3}$. Die ganzen Zahlen werden mit den Kommazahlen, die durch Bruchzahlen dargestellt werden können, erweitert, wodurch wir grenzenlos dividieren können.



In der Abbildung sind die Zahlenmengen als Ellipsen dargestellt. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beinhalten alle positiven ganzen Zahlen. Mit der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden die negativen ganzen Zahlen (z.B. -2) zu den positiven hinzugefügt. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ beinhalten alle positiven und negativen Zahlen und zusätzlich werden die Brüche und Dezimalzahlen dazu genommen.



Rationalen Zahlen können alle auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. Links der Null befinden sich die negativen Zahlen und rechts der Null stehen die positiven Zahlen.

7 Funktionen

7.1 Was ist eine Funktion?

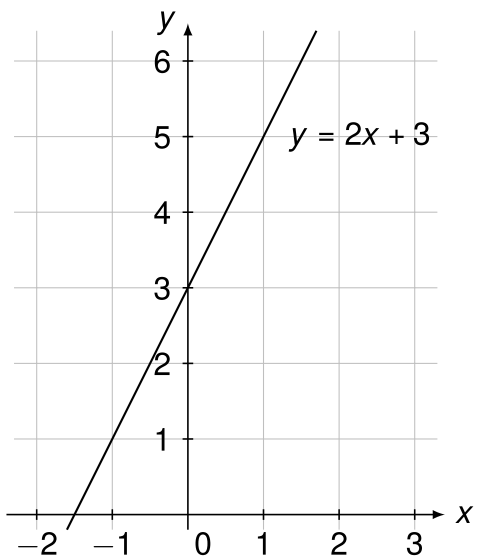
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element x aus der Menge X (auch Definitionsbereich genannt) ein Element y einer Menge Y (auch Wertebereich genannt) zuordnet.

Was ist
eine Funktion?

Schauen wir uns dazu die Funktion

$$y = 2x + 3$$

an. Den Graph zu dieser Funktion sehen wir in der nebenstehenden Abbildungen.



Funktionen sehen meistens so aus, dass auf der einen Seite des Gleichheitszeichens ein y oder ein $f(x)$ steht und auf der anderen Seite ein Term, wie auch in unserem Beispiel.

Was bedeutet aber überhaupt *Zuordnung*?
Wird für das x ein Zahlenwert eingesetzt, erhalten wir einen ganz bestimmten y-Wert. Dadurch hat jeder x-Wert einen zugewiesenen y-Wert, wodurch eine Beziehung zwischen den x- und den y-Werten besteht, z.B.:

Zuordnung

- Wenn wir $x = 1$ in unsere Beispiel-Funktion einsetzen, dann folgt für den dazugehörigen y-Wert: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
- Bei $x = 2$ folgt $y = 7$, bei $x = 3$ folgt $y = 9$ und so weiter…

Jedem x-Wert wird ein eindeutiger y-Wert zugewiesen.

In einer Wertetabelle können wir die ausgerechneten Punkte zusammenfassen:

Äquivalenzumformungen bei Gleichungen im Überblick

- **beidseitige Addition**

$$\begin{aligned} x-5 &= 5 \quad &|+5\\ \Leftrightarrow\ x-5+5 &= 5+5\\ \Leftrightarrow\ x &= 10 \end{aligned}$$

- **beidseitige Subtraktion**

$$\begin{aligned} 3+x &= 8 \quad &|-3\\ \Leftrightarrow\ 3+x-3 &= 8-3\\ \Leftrightarrow\ x &= 5 \end{aligned}$$

- **beidseitige Multiplikation**

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x &= 4 \quad &|\cdot 2\\ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{2}x\cdot 2 = &= 4\cdot 2\\ \Leftrightarrow\ x &= 8 \end{aligned}$$

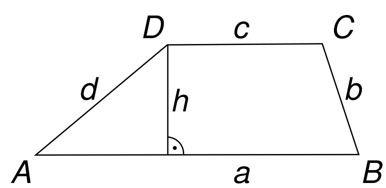
- **beidseitige Division** ($\neq 0$)

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \quad &|:2\\ \Leftrightarrow\ \tfrac{2x}{2} &= \tfrac{12}{2}\\ \Leftrightarrow\ x &= 6 \end{aligned}$$

Gleichungen als Formeln nutzen

Wir können Gleichungen bei der Berechnung von Formeln sehr gut nutzen. Schauen wir uns das anhand eines **Beispiels** an.

Berechne die Höhe des Trapezes. Gegebene Werte: Flächeninhalt $A = 8\ \mathrm{m}^2$, Grundseite $a = 5$ m und Seite $c = 3$ m.



1. Flächenformel für Trapez: $A = \frac{(a+c)}{2}\cdot h$
2. Formel nach der gesuchten Variablen h umstellen:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{(a+c)}{2}\cdot h \quad &|\cdot 2\\ \Leftrightarrow\ 2\cdot A &= (a+c)\cdot h \quad &|:(a+c)\\ \Leftrightarrow\ \tfrac{2\cdot A}{(a+c)} &= h \end{aligned}$$

3. Gegebene Werte einsetzen und ausrechnen:

$$h = \frac{2\cdot A}{(a+c)} = \frac{2\cdot 8\ \mathrm{m}^2}{(5\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{m})} = \frac{16\ \mathrm{m}^2}{8\ \mathrm{m}} = 2\ \mathrm{m}$$

4. Antwortsatz notieren: Die Höhe des Trapezes beträgt 2 m.

Nach diesem Vorgehen können wir alle Größen der geometrischen Formen, die wir kennen gelernt haben, berechnen. Wir müssen dafür nur die Formel aus der Formelsammlung aufschreiben, umformen und ausrechnen.