Inhalt

1 Brüche und Dezimalzahlen

1.1 Einleitung

Brüche und Dezimalzahlen sind Schreibweisen, um Zahlen zu beschreiben, die zwischen den natürlichen Zahlen (also $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$) liegen. Auf diese Weise können wir z.B. eine Hälfte oder ein Viertel ausdrücken.

Einstieg

> **Brüche** bestehen aus einem Nenner und einem Zähler. Wir schreiben sie folgendermaßen auf:
>
> $$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} \quad \text{z.B.} \quad \frac{1}{2}$$

Stellen wir uns vor, dass wir eine Tafel Schokolade gleichmäßig auf vier Personen aufteilen möchten. Hierfür müssen wir die Tafel in vier gleich große Stücke unterteilen. Die Gesamtmenge der Stücke ist in unserem Bruch der Nenner. Die Anzahl an Stücken, die jede Person von der Gesamtmenge bekommt, ist der Zähler. Damit beträgt in unserem Beispiel der Nenner vier und der Zähler eins. Jede Person erhält also $\frac{1}{4}$ der Schokolade. Wenn jetzt eine Person kein Stück möchte und du dafür ihr Viertel bekommst, hast du $\frac{2}{4}$. Da du zwei Stücke von der Gesamtmenge erhältst, beträgt der Zähler nun zwei.

- In wie viele Teile unterteilen wir die Schokolade? $\rightarrow$ **Nenner**
- Wie viele Teile davon bekommt eine Person? $\rightarrow$ **Zähler**

Wenn wir das verstanden haben, können wir Zahlen beliebig fein unterteilen. Je kleiner der Nenner dabei ist, desto feiner die Unterteilung.

Wenn die Anzahl der Stücke (Zähler) mit der Gesamtmenge an Stücken (Nenner) übereinstimmt, sprechen wir von einem Ganzen. Im Bruch können wir ein Ganzes z.B. als $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$ oder $\frac{8}{8}$ ausdrücken. Wenn also Zähler und Nenner gleich groß sind, haben wir immer ein Ganzes. Wir können aber auch Zahlen darstellen, die größer sind als eins, z.B. $\frac{3}{2}$ oder $\frac{8}{4}$.

Dezimalzahlen

Bruch in Dezimalzahl

Dezimalzahl in Bruch

Wir möchten den Bruch $\frac{3}{2}$ als Dezimalzahl schreiben. Wenn wir drei Hälften haben, sind das im Grunde ein Ganzes und ein Halbes. Als Dezimalzahl schreiben wir 1,5 - also zuerst die ganze Zahl und hinter dem Komma den Rest.

Wir können uns merken, dass wir bei einer Nachkommastelle in Zehnerschritte unterteilen. Das ist z.B. auf einem Lineal der Fall: Ein Zentimeter hat zehn Millimeter. Somit sind 1,8 cm das Gleiche wie 1 cm und 8 mm oder 1 cm und 0,8 cm. Bei zwei Nachkommastellen unterteilen wir dann in Hundertstel und so weiter.

Um einen Bruch als Dezimalzahl darzustellen, brauchen wir an mancher Stelle etwas Übung und Erfahrung. Hier sind ein paar wichtige Zahlenbeispiele, die uns auf jeden Fall weiterhelfen:

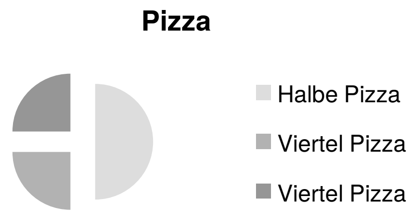
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
0,5	0,25	0,2	0,125	0,1	0,01

1.2 Brüche addieren und subtrahieren

Hauptnenner finden

Stellen wir uns einmal vor, dass wir gerade zu Hause eine Pizza essen. Wir haben das erste Viertel gegessen und haben dementsprechend drei Viertel der Pizza noch übrig. Oder wir könnten sagen, dass wir eine halbe Pizza und noch ein Viertel haben, denn zwei Viertel sind ja das Gleiche wie eine halbe Pizza. Wenn wir das mathematisch ausdrücken, heißt das:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



An dieser kleinen Aufgabe sehen wir schon das einzig Schwierige am Bruchrechnen: Der Nenner. Der Nenner war ja die Zahl, durch die wir die Pizza teilen. Um Brüche miteinander verrechnen zu dürfen, müssen wir immer beide Nenner auf die gleiche Zahl bringen. In unserem Beispiel würde das heißen: Wir sagen, unser $\frac{1}{2}$ Stück Pizza ist das gleiche wie $\frac{2}{4}$ Stücke Pizza. Dann würde unsere Gleichung so aussehen:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Wir sehen, dass der Nenner die ganze Zeit gleich bleibt und der Zähler einfach addiert wird. Also: 2 + 1 = 3 und der Nenner bleibt 4.

2 Prozentrechnung

2.1 Was ist ein Anteil?

Einstieg

Wir stellen uns vor, in einer Klasse sind 25 Schüler. Die meisten sind 13 Jahre alt. Es gibt aber zwei Schüler, die 12 Jahre alt sind und einen der schon 14 ist. Wie drücken wir aus, wie hoch der Anteil an Schülern in der Klasse ist, die nicht 13 Jahre alt sind? Wir nutzen einen Bruch: Dabei steht die gesamte Anzahl der Schüler im Nenner und die Anzahl der gesuchten Größe im Zähler: In diesem Fall sind drei von 25 Schülern nicht 13 Jahre alt, also $\frac{3}{25}$ Schüler. Der Anteil 12 Jähriger wäre demnach $\frac{2}{25}$ (zwei von 25) und der 14 Jähriger $\frac{1}{25}$ (eins von 25).

2.2 Was sind Prozent und wie bestimmen wir sie?

Wie kommen wir jetzt von Anteilen auf Prozente?

Prozent bedeutet übersetzt:
Pro Hundert. Demnach ist 1% *ein* Teil von Hundert.

Dabei ist die Hundert in der Regel keine absolute Zahl. Stattdessen setzen wir eine bestimmte Menge einfach mit 100% gleich. Wenn wir z.B. sechs Bananen haben, sind das unsere 100%. Essen wir drei dieser Bananen auf, haben wir nur noch die Hälfte über, also 50%. Oder wie im Beispiel mit den 25 Schülern: Wenn alle anwesend sind, dann ist die Klasse vollzählig. Also sind 100% da. Wenn die Hälfte fehlt, sind nur 50% anwesend. Dabei können wir Prozentzahlen auch als Dezimalzahlen aufschreiben:

100%	$\Rightarrow$	1	132%	$\Rightarrow$	1,32
50%	$\Rightarrow$	0,5	5%	$\Rightarrow$	0,05
12,5%	$\Rightarrow$	0,125	25,76%	$\Rightarrow$	0,2576

Am einfachsten ist es, wenn unsere Ausgangsgröße 100 ist. Denn dann können wir einfach die Prozentzahl ablesen. Deshalb werden bei Lebensmitteln die Inhaltsstoffe immer pro 100 g angegeben. Wenn also die Cornflakes 13,5 g Zucker enthalten, wissen wir, dass der Anteil an Zucker 13,5% (oder 0,135) von 100 g ausmacht.

Um die Prozentzahl aller 12 Jährigen aus unserer Schulklasse zu erhalten ($\frac{2}{25}$), gehen wir folgendermaßen vor: Da hier die Ausgangsgröße nicht Hundert ist, sondern 25, erweitern wir den Bruch mit 4, sodass wir 100 im Nenner erhalten:

$$\frac{2 \cdot \mathbf{4}}{25 \cdot \mathbf{4}} = \frac{8}{100}$$

Das entspricht 8% (0,08). Wenn wir nicht auf 100 erweitern können, müssen wir schriftlich dividieren, um auf die Prozentzahl zu kommen.

2.3 Prozentwerte, Prozentsätze und Grundwerte berechnen

Übersicht

Beispiel: *G* gesucht

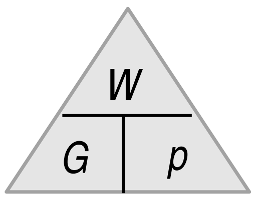
Beispiel: *W* gesucht

Jetzt kommt der eigentlich spannende und wichtige Teil: **das Rechnen mit Prozenten**. Wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang sind:

- **Grundwert** (G): Ausgangsgröße
  (z.B. die 25 Schüler)
- **Prozentsatz** (p): Anteil mit Eigenschaft
  (z.B. 8% sind zwölf Jahre alt)
- **Prozentwert** (W): absolute Zahl zum Prozentsatz
  (z.B. 2 Schüler sind zwölf Jahre alt)

Diese Begriffe haben folgende Beziehung zueinander:

$$W = G \cdot p \qquad G = \frac{W}{p} \qquad p = \frac{W}{G}$$



Die Zusammenhänge sind in dem Dreieck dargestellt. Wenn G oder p gesucht ist, teilen wir W durch die jeweils andere Zahl. Wenn W gesucht ist, rechnen wir $G \cdot p$. Mit diesen drei Werten können wir jetzt rechnen. Schauen wir uns drei mögliche Aufgabentypen hierzu an:

1. In einer Klasse sind 25 Schüler. Zwei davon sind 12 Jahre alt, der Rest ist älter. Wie viel Prozent der Schüler sind 12?
   Lösung: $\frac{W}{G} = p$ also $\frac{2}{25} = 0{,}08$.
   Antwort: 8% der Klasse sind 12 Jahre alt.

4 Zuordnungen

4.1 Was sind Zuordnungen?

Zuordnungen sind zwei Größen, die zusammenhängen bzw. abhängig voneinander sind. Als Beispiel können wir Preis und Anzahl von Fußbällen nehmen: Sagen wir ein Fußball kostet 8 Euro. Dementsprechend kosten zwei Fußbälle 16 Euro. Wir ordnen also einer Anzahl an Fußbällen den entsprechenden Preis zu. Zuordnungen notieren wir folgendermaßen:

Einstieg

Fußbälle		Preis
1	$\rightarrow$	8 Euro
2	$\rightarrow$	16 Euro
3	$\rightarrow$	24 Euro

Der Pfeil bedeutet „wird zugeordnet“. Wir können die Zuordnung auch so aufschreiben:

Fußbälle	1	2	3	4	5	6
Preis	8	16	24	32	40	48

4.2 Von der Zuordnung zur Funktion

Wir können als Formel für eine Zuordnung folgendes schreiben:

$$\text{Anzahl Fußbälle} \cdot \text{Einzelpreis} = \text{Gesamtpreis}$$

So z.B. 5 Fußbälle $\cdot$ 8 Euro = 40 Euro. Mithilfe von Zuordnungen möchten wir aber allgemeine Aussagen treffen, unabhängig von der Anzahl. Dazu schreiben wir statt der genauen Anzahl einfach ein x. Das ist einfacher als immer Anzahl zu schreiben. Unsere Zuordnung sieht dann so aus:

$$x \rightarrow 8x$$

Das würde wörtlich heißen: Einer beliebigen Anzahl x wird ein Preis von 8 Euro mal der Anzahl x zugeordnet. Das können wir auch als Formel schreiben:

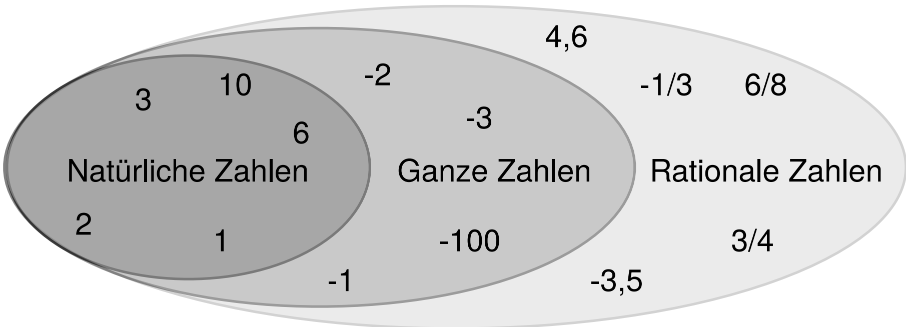
$$\text{Gesamtpreis} = 8x \quad [\text{in Euro}]$$

Die wahrscheinlich wichtigste Form von Zuordnungen sind Koordinatensysteme. Die sehen so aus:

7 Rationale Zahlen

Die nächste Zahlenmenge, die wir kennen sollten, sind die Zahlen zwischen den ganzen Zahlen. Das sind alle Brüche und die meisten Dezimalzahlen. Wahrscheinlich kannst du alle Dezimalzahlen dazu zählen, die du kennst. Es gibt aber auch Zahlen, die eine unendlich lange Zahlenfolge hinter dem Komma haben und die gehören dann nicht zu den rationalen Zahlen. Ein typisches Beispiel für eine nicht rationale Zahl ist die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$. Denn diese hat unendlich viele Nachkommastellen.

An dieser Stelle schauen wir uns alle bisherigen Zahlenmengen in einem Schaubild an:

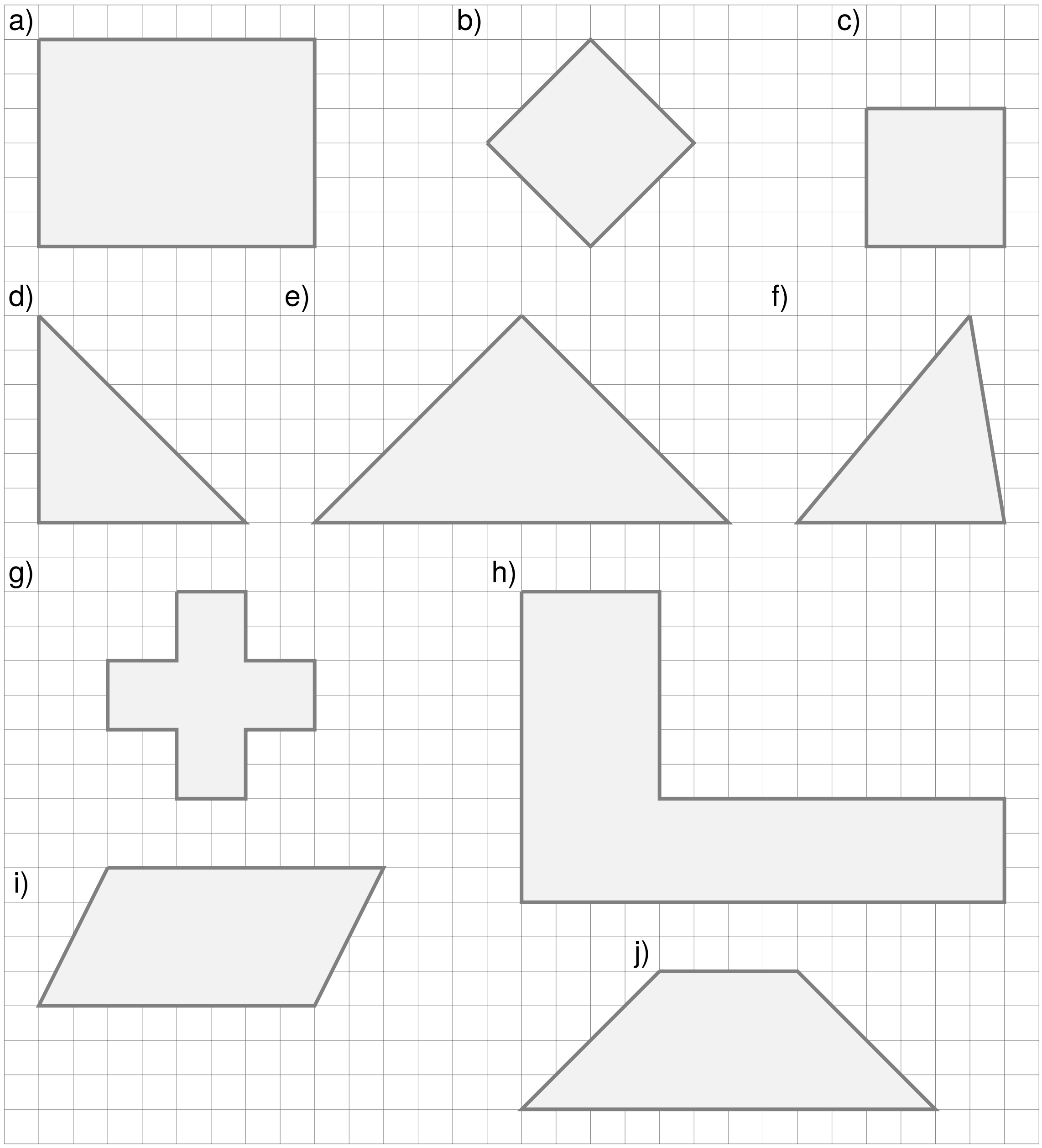


> Zahlenmengen, die du kennen solltest:
>
> - $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen
> - $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen
> - $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen

Wie wir mit rationalen Zahlen rechnen können, kannst du zur Wiederholung noch einmal im ersten Kapitel nachlesen.

10.4 Aufgaben

A.10.1. Berechne den Flächeninhalt folgender Formen. Nutze zum Messen dein Geodreieck.



A.10.2. Wie wird der Umfang einer beliebigen Form gemessen?

A.10.3. Miss den Umfang der Formen e), g) und h) aus Aufgabe A.10.1..

A.10.4. Kannst du eine allgemeine Formel für den Umfang von Quadraten und Rechtecken bestimmen? Erkläre warum/warum nicht.