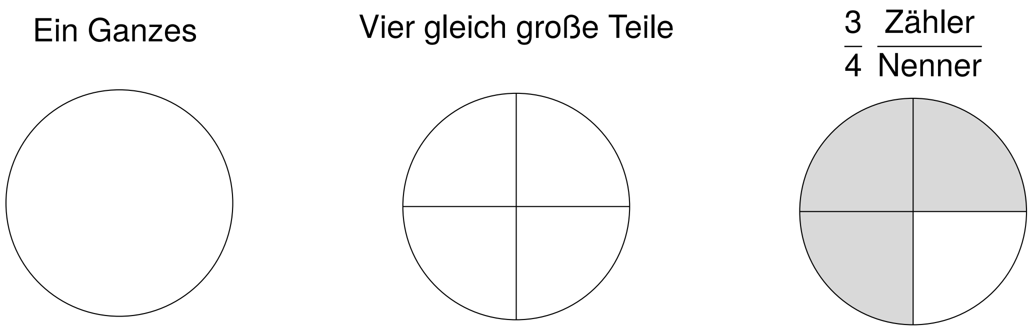
Inhalt

2 Bruchrechnung

Der Nenner (unten) gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird. Der Zähler (oben) gibt an, wie viele Teile davon genommen werden.

Einstieg

Beispiel: $\frac{3}{4}$ $\left[\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right]$



Beim Rechnen mit Brüchen gelten die folgenden Regeln:

- Erweitern: Ein Bruch wird erweitert, indem sowohl der Zähler (oben) als auch der Nenner (unten) mit der gleichen Zahl multipliziert wird. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

erweitern, kürzen und addieren

- Kürzen: Ein Bruch wird gekürzt, indem sowohl der Zähler (oben) als auch der Nenner (unten) durch die gleiche Zahl geteilt wird. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow[9]{} \frac{9 \div 9}{27 \div 9} = \frac{1}{3}$$

- Gemischte Zahl $\leftrightarrow$ Unechter Bruch: Eine gemischte Zahl (ganze Zahl und Bruch z.B. $2\frac{1}{4}$) kann nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler $>$ Nenner) umgewandelt werden:

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

unechter Bruch

7 Prozent- und Zinsrechnung

7.1 Prozentrechnung

Vorweg muss gesagt werden, dass es grundsätzlich möglich ist, alle Aufgaben der Prozentrechnung ebenfalls mit dem Dreisatz zu lösen. Dazu wollen wir uns ein **Beispiel** angucken.

Prozente anschaulich

mit Dreisatz

Wir möchten gerne wissen, wie viel Prozent 70 Euro von 250 Euro sind? Wir entnehmen dem Text, dass die 250 Euro 100 % entsprechen. Wir erstellen erneut eine Dreisatztabelle:

Euro	%
250	100

Zuerst berechnen wir, wie viel Prozent 10 Euro von 250 Euro sind und teilen auf beiden Seiten unserer Tabelle durch 25:

	Euro	%	
	250	100	
$\div 25$	10	4	$\div 25$

10 Euro von 250 Euro sind also 4 %. Im nächsten Schritt berechnen wir, wie viel Prozent 70 Euro von 250 Euro sind, indem wir auf beiden Seiten unserer Tabelle mit 7 multiplizieren:

	Euro	%	
	250	100	
$\div 25$	10	4	$\div 25$
$\cdot 7$	70	28	$\cdot 7$

3. binomische Formel

Bei der **dritten binomischen Formel** wird eine Summe mit einer Differenz multipliziert oder umgekehrt, eine Differenz mit einer Summe:

$$(2x + 3) \cdot (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$
$$(2x - 3) \cdot (2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$

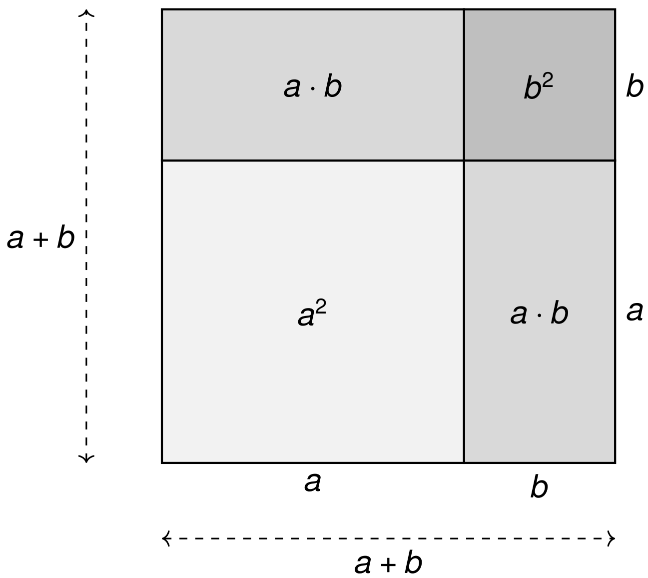
Die Reihenfolge der Faktoren spielt dabei keine Rolle. Es ist jedoch wichtig, dass die Summe und die Differenz, also die beiden Klammern, die gleichen Ausdrücke enthalten. Beim folgenden Term kann die dritte binomische Formel beispielsweise nicht angewendet werden:

$$(4x + 3) \cdot (2x - 3)$$

Grafische Herleitung der ersten binomischen Formel

1. binomische Formel anschaulich

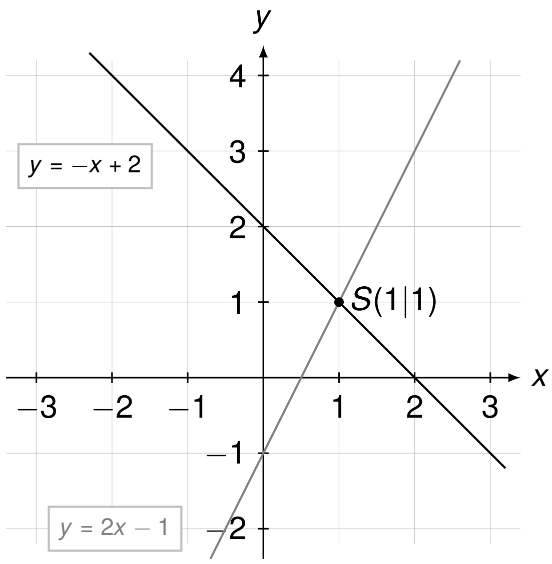
Zur Veranschaulichung der ersten binomischen Formel wollen wir uns noch kurz die grafische Herleitung anschauen. Es ist auch möglich, die anderen beiden binomischen Formeln grafisch herzuleiten, aber das behandeln wir an dieser Stelle nicht weiter.



Wie wir anhand der Grafik erkennen können, ist die Seitenlänge des Quadrats $a + b$. Für die Berechnung des Flächeninhalts dieses Quadrats erhalten wir demnach folglich $(a + b)^2$. Wenn wir händisch alle Flächeninhalte der Teilflächen zusammenzählen, erhalten wir

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

was der ersten binomischen Formel entspricht.



Wir halten fest:

- $m_1 \neq m_2 \quad \Rightarrow$ gemeinsamer Schnittpunkt
- $m_1 = m_2 \wedge b_1 \neq b_2 \quad \Rightarrow$ parallel
- $m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2 \quad \Rightarrow$ identisch

[m_1 = Steigung der ersten Geraden; m_2 = Steigung der zweiten Geraden; b_1 = Schnittpunkt mit der y-Achse der ersten Geraden; b_2 = Schnittpunkt mit der y-Achse der zweiten Geraden]

11.2 Rechnerisches Lösen

Beim rechnerischen Lösen von linearen Gleichungssystemen gibt es drei verschiedene Verfahren:

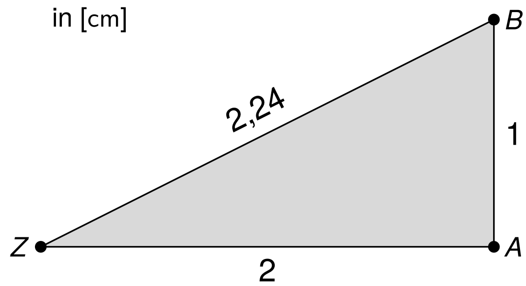
- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

Es ist grundsätzlich möglich, jedes lineare Gleichungssystem mit allen drei Verfahren zu lösen. Jedoch bietet sich häufig ein bestimmtes Verfahren besonders gut an.

15 Zentrische Streckung

Bei einer zentrischen Streckung handelt es sich um eine Vergrößerung bzw. um eine Verkleinerung der Originalfigur. Ausgangspunkt jeder zentrischen Streckung ist das sogenannte Streckzentrum (Z). Zu diesem Zweck wollen wir uns die unten angezeigte Figur einmal genauer angucken.

zentrische Streckung



Bei unserer Figur handelt es sich um ein Dreieck. Das Streckzentrum (Z) liegt, wie zu sehen, links. Wir wollen dieses Dreieck jetzt zuerst einmal vergrößern. An diesem Punkt kommt der sogenannte Streckungsfaktor k ins Spiel. Er gibt an, mit welchem Faktor wir die Figur vergrößern müssen.

Wir wählen in unserem Fall $k = 2$. Das bedeutet, dass wir die Originalstrecken mit dem Faktor 2 vergrößern oder anders ausgedrückt, wir verdoppeln die Längen der Originalstrecken. Hinweis: Eine Strecke ist die Verbindung zwischen zwei Punkten. Beispiel: $\overline{ZA}$ ist die Strecke zwischen den Punkten Z und A.

Unsere beiden Strecken, welche vom Streckzentrum ausgehen, sind: $\overline{ZA} = 2\ \text{cm}$ und $\overline{ZB} = 2{,}24\ \text{cm}$ Als nächstes berechnen wir unsere neuen Streckenlängen. Wir multiplizieren unsere Originalstrecken also mit dem Faktor $k = 2$ und erhalten:

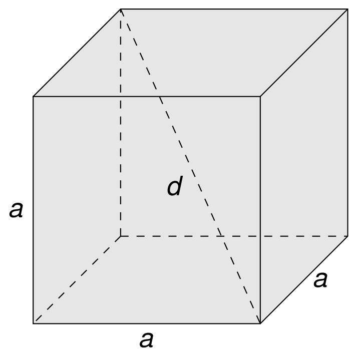
$$\overline{ZA} \cdot k = 2\ \text{cm} \cdot 2 = 4\ \text{cm} = \overline{ZA'} \quad \text{und} \quad \overline{ZB} \cdot k = 2{,}24\ \text{cm} \cdot 2 = 4{,}48\ \text{cm} = \overline{ZB'}$$

Unsere nun entstandene Figur mit den neuen Bildpunkten A' und B' sieht also wie folgt aus:

19 Körper

Würfel

Würfel
und Quader



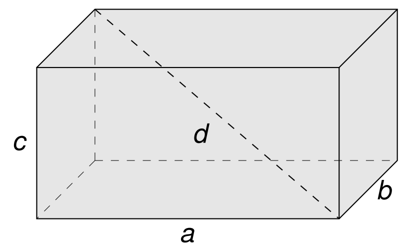
Eigenschaften:

- Alle Kanten sind gleich lang.
- Alle 6 Flächen sind gleich groß.

Formeln:

Oberflächeninhalt:	O	=	$6 \cdot a^2$
Volumen:	V	=	$a \cdot a \cdot a = a^3$
Raumdiagonale:	d	=	$\sqrt{3a^2} = a \cdot \sqrt{3}$

Quader

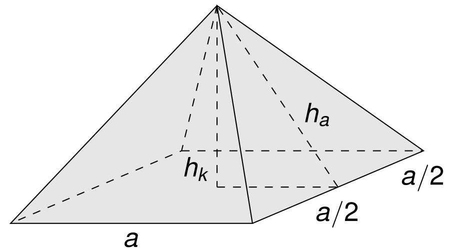


Formeln:

Oberflächeninhalt:	O	=	$2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Volumen:	V	=	$a \cdot b \cdot c$
Raumdiagonale:	d	=	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Pyramide (quadratisch)

Pyramide



Formeln:

Oberflächeninhalt:	O	=	$a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$
Volumen:	V	=	$\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_k = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_k$

Außerdem gelten nach dem Satz des Pythagoras die folgenden Zusammenhänge:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_k^2 = h_a^2 \text{ und } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 = s^2$$

22 Trigonometrie

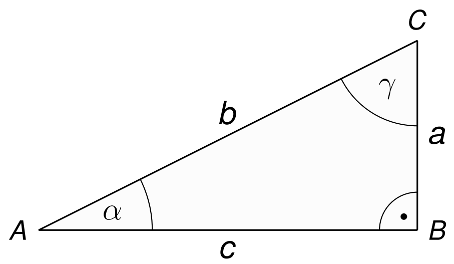
Das Thema Trigonometrie ist dir wahrscheinlich eher bekannt unter den Begriffen „Sinus, Cosinus und Tangens“. Grundsätzlich können Sinus, Cosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken angewendet werden. Wir wollen für das unten abgebildete Dreieck die drei Winkelbeziehungen sin, cos und tan aufstellen. Dazu nehmen wir den Winkel α als unseren Bezugspunkt.

Winkelbeziehungen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$



Von unserem Winkel α aus gesehen, ist a die **Gegenkathete**, weil sie dem Winkel α **gegenüber**liegt. Die Hypotenuse liegt immer **gegenüber des rechten** Winkels, also ist b unsere **Hypotenuse**.

Sinus, Cosinus, Tangens

Von unserem Winkel α aus gesehen, ist c die **Ankathete**, weil sie **direkt** an dem Winkel α **anliegt**.

Wir können mit Hilfe der drei Winkelbeziehungen sowohl fehlende Seiten als auch fehlende Winkel berechnen. Wir schauen uns dazu das folgende **Beispiel** an und berechnen alle fehlenden Komponenten.

Berechne die fehlenden Seiten und Winkel unter der Voraussetzung, dass die folgenden Angaben vorhanden sind:

$$b = 7 \text{ cm};\ \alpha = 13^\circ;\ \gamma = 90^\circ$$

Beispiel

Zuerst fertigen wir eine kleine Skizze an, um uns den Sachverhalt klar zu machen: