Inhalt

1 Basics

1.1 Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir kurz auf das mathematische Objekt Menge eingehen und die wichtigsten Mengenoperationen beschreiben. Nach der Definition von *Georg Cantor* ist eine Menge eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Das bedeutet, dass wir jegliche Objekte in einer Menge zusammenfassen können und so auch eine Menge erhalten, wenn wir die einzelnen Objekte unterscheiden können. Diese beschreiben wir konventionsgemäß mit geschweiften Klammern. Beispielsweise sind

Definition einer Menge

Schreibweisen

- $A = \{\text{rot, blaue, grün, gelb}\}$
- $B = \{\text{groß, klein, stark, schwach}\}$
- $C = \{1, 2, 3, 4\}$
- $D = \{\text{grün}, 2, \pi, \sqcap, \text{qprt}\}$
- $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$

jeweils Mengen. Dabei ist es unerheblich, ob sich in dieser Menge Farben, Zahlen oder auch auf den ersten Blick unlogische Zeichen oder Textfolgen befinden. Hingegen sind

- $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 0\}$
- $H = \{\text{groß, klein, sehr klein, winzig, riesig, groß, gigantisch}\}$

keine Mengen. Da sie jeweils zwei ununterscheidbare Elemente beinhalten. Für solche Objekte gibt es verschiedene Rechenoperationen, welche wir in folgender Tabelle beschreiben:

Übersicht Mengenoperationen

Mengen-operation	**Bedeutung**
$\emptyset$	Beschreibt die leere Menge, die keine Elemente enthält.
$x \in M$	Beschreibt, dass ein Element x in einer Menge M enthalten ist.
$x \notin M$	Beschreibt, dass ein Element x nicht in einer Menge M enthalten ist.
$M \subset N$	Beschreibt die Teilmengeneigenschaft. M ist also eine Teilmenge der Menge N und somit sind alle Mengen von M auch in N enthalten.
$M \cup N$	Beschreibt die Vereinigung von zwei Mengen, das heißt, dass in der Vereinigung von M und N jedes Element von M und N liegt.
$M \cap N$	Beschreibt den Schnitt von zwei Mengen, das heißt, dass im Schnitt von zwei Mengen M und N nur die Elemente enthalten sind, welche sowohl in M als auch in N enthalten sind.

Mengenoperation	Bedeutung
$M \backslash N$	Beschreibt die Differenzbildung der Mengen M und N. Wir sprechen von „M ohne N“. Also sind in M ohne N gerade die Elemente enthalten, welche in M aber nicht in N liegen.

Weitere Rechengesetze

Rechnen mit Mengen

Zahlenbereiche

Intervalle

Diese Operationen betrachten wir nun an folgenden Beispielen. Seien dazu die Mengen A, B, C und D wie oben beschrieben dann erhalten gilt:

a) $A \neq \emptyset$

b) $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

c) groß $\in B$

d) groß $\notin C$

e) $\{1, 2\} \subset B$

f) $A \cup B = \{$rot, blaue, grün, gelb, groß, klein, stark, schwach$\}$

g) $C \cup D = \{1, 2, 3, 4,$ grün$, \pi, \sqcap,$ qprt$\}$

h) $A \cap C = \emptyset$

i) $C \cap D = \{2\}$

j) $C \backslash D = \{1, 3, 4\}$

Abschließend möchten wir in diesem Abschnitt noch die reellen Intervalle als Mengen wiederholen, da diese im Laufe der verschiedenen Thematiken häufig auftauchen werden. Es gilt:

Intervall	Bedeutung
(a, b)	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a < x < b$
$[a, b)$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a \leq x < b$
$(a, b]$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a < x \leq b$
$[a, b]$	Alle $x \in \mathbb{R}$, bei denen gilt: $a \leq x \leq b$

1.2 Rechenregeln

Playlist zu Potenzen

In diesem Kapitel rekapitulieren wir kurz die bekannten Regeln zum Umformen von Potenz- und Logarithmengesetzen. Gesetze wie das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz und Rechenregeln zum Arbeiten mit Brüchen werden nicht wiederholt, sondern als bekannt vorausgesetzt.

1.2.1 Potenzgesetze

Wir starten mit der Wiederholung der Potenzgesetze. Dazu haben wir eine Auswahl zunächst in folgender Tabelle dargestellt.

Regel	Erklärung
$a^0 = 1,\ a \neq 0$	Eine von 0 verschiedene Zahl ergibt mit 0 potenziert immer 1.
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	Bei Multiplikation gleicher Basis werden die Exponenten addiert.

Wir betrachten erneut unser Beispiel $a_n = 2^n - 1$. Welche der beiden Formeln du benutzen möchtest, ist einerseits Geschmackssache, andererseits hängt es aber auch etwas von der Folge ab, die betrachtet werden soll. Oftmals ist sowohl der Quotient als auch die Differenzbildung möglich und zielführend. In unserem Fall sieht der Quotient von Summen zunächst weniger schön aus, sodass wir uns für die zweite Zeile entscheiden. Wir beginnen daher einfach mit der linken Seite und schauen, ob wir diese ≥ 0 oder ≤ 0 zeigen können. Es gilt:

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 1 - (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 - 2^n + 1 = 2^n > 0.$$

Wir sehen, dass unsere Folge streng monoton wachsend ist. Oftmals und mathematisch gesehen erst zu 100% korrekt, ist es von Vorteil die Monotonie mit der vollständigen Induktion zu zeigen, welche wir uns bereits im Kapitel 1.4 angeschaut haben.

Eine weitere mögliche Eigenschaft einer Folge ist die **Beschränktheit**. Diese sagt etwas darüber aus, ob sich die Folge stets oberhalb bzw. unterhalb eines Wertes oder, wenn dies beides erfüllt ist, zwischen zwei Werten befindet. Das Erkennen einer solchen Schranke ist nicht immer leicht. Hier ist es ratsam ein paar Folgeglieder zu betrachten oder mittels Taschenrechner zu berechnen und eine Vermutung aufzustellen. Auch ein genauer Blick auf die Definition der Folge kann hier helfen. Anschließend kann diese Vermutung per Induktion bewiesen werden. In unserem Beispiel $a_n = 2^n - 1$ sehen wir schnell, dass diese Folge nach oben nicht beschränkt sein kann, da $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ gilt. Daran ändert auch die -1 nichts. Für eine untere Schranke gibt es mehrere Möglichkeiten, da diese nicht eindeutig ist. Es kann hier schnell auf die Zahl 0 als untere Schranke raus kommen. Da wir die natürlichen Zahlen aber so verstehen, dass diese bei 1 beginnen, können wir auch 1 als untere Schranke zeigen.

1. **Induktionsanfang** $n = 1$: $a_1 = 2^1 - 1 = 1 \geq 1 \quad \checkmark$
2. **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung $a_n \geq 1$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
3. **Induktionsschritt** $n \to n+1$: $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \geq 2^n - 1 = a_n \overset{\text{I.V.}}{\geq} 1$

2.1.2 Konvergenz

Konvergez & Divergenz

Grenzwert

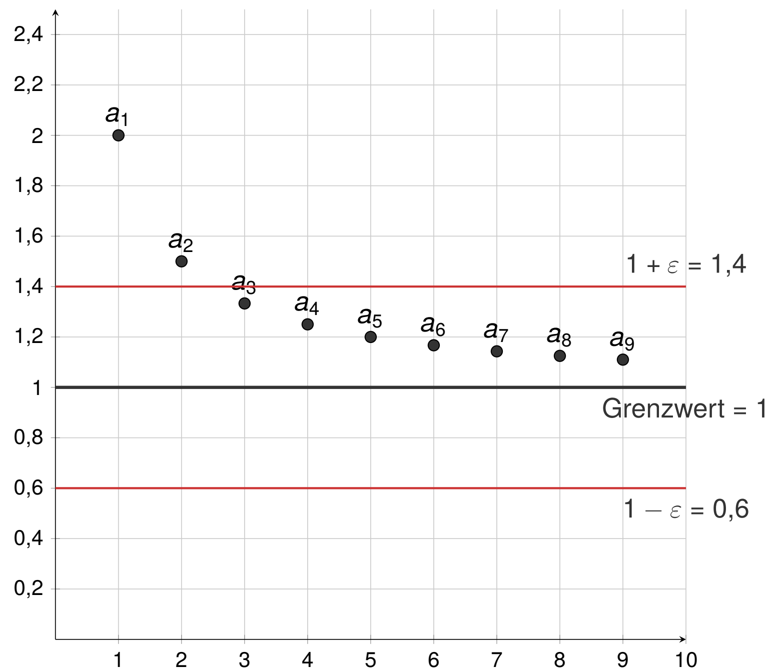
Die letzte Eigenschaft, die wir betrachten möchten, ist die **Konvergenz von Folgen**. Diese ist erfahrungsgemäß nicht leicht zu verstehen, daher werden wir uns langsam an die Sache herantasten. Zunächst ist zu klären, was wir unter der Konvergenz von Folgen genau verstehen. Ein salopper Definitionsversuch wäre zu sagen, dass eine Folge a_n gegen einen Grenzwert a konvergiert, wenn sie sich diesem im Unendlichen immer weiter annähert. Und genau diese Definition halten wir nun mathematisch fest, um Interpretationsspielräume auszuschließen.

> **Definition Konvergenz**
> Sei $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$, so sagen wir, dass a_n gegen a konvergiert, in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn
>
> $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet, dass egal welchen Wert für ε wir uns vorgeben, wir immer einen Index n_0 finden, der in der Regel von ε abhängt, sodass alle Folgeglieder mit einem höheren Index einen kleineren

Abstand zum Grenzwert a haben als ε. Zudem halten wir fest, dass eine Folge, die nicht konvergiert, **divergent** genannt wird und wir eine Folge, die gegen 0 konvergiert, **Nullfolge** nennen möchten.

Betrachten wir die Folge $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.



und geben $\varepsilon = 0{,}4$ vor, so erhalten wir für den Grenzwert 1 dieser Folge einen „ε–Schlauch" mit $1 + 0{,}4 = 1{,}4$ und $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Die Definition der Konvergenz sagt jetzt aus, dass egal wie klein wir das ε wählen, es immer einen Index gibt, ab welchem alle weiteren Elemente der Folge innerhalb dieses Schlauchs landen und auch nicht mehr verlassen! In obiger Zeichnung für $\varepsilon = 0{,}4$ ist dies bereits ab a_3 erfüllt. Würden wir ε verkleinern und beispielsweise $\varepsilon = 0{,}2$ betrachten, so wären die Folgeglieder erst ab a_6 und allen weiteren Elementen innerhalb des Schlauchs. Wir werden mathematisch zeigen, dass der in der Zeichnung behauptete Grenzwert korrekt ist, also dass gilt: $a = 1$. Dazu müssen wir obige Definition nachrechnen. Zunächst betrachten wir die Differenz:

Beispiel (1)

Beispiel (2)

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Nun fordern wir, dass $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist, welches für jedes $\varepsilon > 0$ gefunden werden kann. Damit gilt dann für alle $n > n_0$:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Insgesamt haben wir nach der Definition der Konvergenz von Folgen also gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ gilt. Der große Nachteil bei direktem Nachrechnen der Definition ist, dass der Grenzwert a, in diesem Falle 1, bekannt oder zumindest richtig geraten werden muss, um anschließend verifiziert werden zu können. Daher werden wir im Folgenden verschiedene Hilfsmittel besprechen, um die Konvergenz auch mit anderen Methoden zeigen zu können.

Als Erstes betrachten wir verschiedene **Grenzwertsätze**. Diese erlauben es zusammengesetzte Folgen in ihren Einzelheiten zu untersuchen und die Grenzwerte anschließend zusammenzufassen.

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$ für alle $c \in \mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$ für $k \in \mathbb{N}$

Gilt $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$, dann folgt:

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Gilt $a_n \geq 0$, dann folgt:

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

Grenzwertsätze

Um diese Grenzwertsätze gewinnbringend anwenden zu können, bedarf es einiger bekannter Grenzwerte von Folgen.

Grenzwerte von Folgen:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$, für $a \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, für $k > 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$, für $k,\ c > 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, für $c > 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, für $|q| < 1$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, für $|q| > 1$

Die Folge q^n, welche in den Punkten 6. und 7. beschrieben wird, besitzt einen eigenen Namen, nämlich **geometrische Folge** und wird im Kapitel über Summen und Reihen ebenfalls eine Rolle spielen. Mit Hilfe der Grenzwertsätze und dieser ersten bekannten Grenzwerte sind wir in der Lage, Folgen zu bearbeiten, die aus diesen Arten zusammengesetzt sind. Daher werden wir einige Beispiele dazu betrachten. Hierbei darf nicht vergessen werden, dass wir uns bei Folgen in den natürlichen Zahlen bewegen und eventuelle Grenzwertmethoden aus dem Kapitel der Funktionen nicht direkt anwendbar sind.

Vorgehen: Wir betrachten einen Bruch aus zwei Polynomen.

1. Finde den Summanden im Nenner, der am schnellsten wächst und die anderen dominiert.
2. Klammere sowohl im Zähler als auch im Nenner diese Potenz aus, auch wenn sie größer als die Potenzen ist, die im Zähler vorkommen.
3. Wir kürzen diese größte Potenz.
4. Benutze bei Konvergenz die Grenzwertsätze 2. und 6..
5. Sollte im Zähler ein divergenter Teil vorkommen, so argumentieren wir anders. Dies ist der Fall, falls die größte Potenz des Zählers größer ist, als die größte Potenz des Nenners.

Grenzwert „Bruch-Beispiel“

Beispiel Wir betrachten folgenden Ausdruck: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{6-5n^2+9n}$

Der Summand, der im Nenner am stärksten wächst, ist n^2, sodass wir diesen ausklammern und kürzen.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (3 - \frac{4n}{n^2} + \frac{5}{n^2})}{n^2 \cdot (\frac{6}{n^2} - 5 + \frac{9n}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{6}{n^2} - 5 + \frac{9}{n}}$$

Rekursive Folgen (1)

Rekursive Folgen (2)

Dabei ist erneut der Zähler nach der I.V. negativ und der Nenner aufgrund des Startwerts $a_1 = 2$ sowie der bereits gezeigten Beschränktheit stets positiv. Demnach ist die Folge monoton fallend. Nun können wir die Früchte des Satzes ernten, indem wir wissen, dass die Folge konvergiert. Durch die Konvergenz wissen wir, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ gilt. Damit erhalten wir mit der rekursiven Definition:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} & = & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2\cdot a_n} & \\
\Leftrightarrow & a & = & \frac{a}{2} + \frac{3}{2\cdot a} & \mid -\frac{a}{2} \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{2} & = & \frac{3}{2\cdot a} & \mid \cdot 2a \\
\Leftrightarrow & a^2 & = & 3 & \mid \sqrt{} \\
\Leftrightarrow & a & = & \pm\sqrt{3} &
\end{array}
$$

Aufgrund der gezeigten Beschränktheit konvergiert diese Folge also gegen $\sqrt{3}$.

2.1.4 Aufgaben

Lösungen

A.2.1 (Level:)
Bestimme für die folgende Aufzählung die explizite Darstellung.

a) $1, 3, 5, 7, 9, ...$ b) $2, 8, 14, 20, ...$ c) $2, -4, 8, -16, ...$ d) $1, 2, 5, 10, 17, ...$

A.2.2 (Level:)
Bestimme für die folgende Aufzählung die rekursive Darstellung.

a) $1, 3, 5, 7, 9, ...$ b) $1, 4, 13, 40, ...$ c) $2, 3, 8, 63, ...$ d) $2, 4, 6, 10, 16, 26, ...$

A.2.3 (Level:)
Zeige für die Folge $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ die Konvergenz mit Hilfe der Definition.

A.2.4 (Level:)
Zeige mit Hilfe der Grenzwertsätze die Konvergenz dieser Folgen.

a) $a_n = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}$ b) $a_n = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

A.2.5 (Level:)
Bestimme den Grenzwert der gegebenen Folgen.

a) $a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n - 2n^2 + 5}$ c) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^4 + - n^3 + n + 1}$ e) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$

b) $a_n = \frac{2n^4 - n^2}{n^3 + 1}$ d) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 10^n + e^n}$ f) $a_n = \frac{2^n + n^2 - 3^n}{2^{2n} + n^{15}}$

A.2.5 (Level:)
Bestimme den Grenzwert dieser Folgen mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz.

a) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$

Beachte: Bei den Stückkosten ist der Definitionsbereich stets echt größer als Null!

Der Übersicht halber bezeichnen wir zudem

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 3x + 3$$

als die durchschnittlichen variablen Kosten.

4.1.4 Betriebsminimum

Stückkosten

BM & BO

BO

Mit den vorangegangenen Konventionen können wir beschreiben, wie wir das sogenannte **Betriebsminimum** (kurz: BM) bestimmen können. Das Betriebsminimum beschreibt das Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten $k_v(x)$. Der Verkaufspreis also sollte stets größer als das Betriebsminimum sein. In unserem Beispiel wäre dies das Minimum der Funktion $k_v(x) = x^2 - 3x + 3$. Wir berechnen also zunächst die Nullstellen der ersten Ableitung durch

$$\begin{aligned} k_v'(x) \overset{!}{=} 0: \quad 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad x &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Das hinreichende Kriterium liefert uns mit

$$k_v''(x) = 2 = k_v''\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

ein Minimum an der Stelle $x = \frac{3}{2}$. Der Wert $K\left(\frac{3}{2}\right)$ wird dabei **kurzfristige Preisuntergrenze** genannt. In einem Schaubild sähe dies so aus: