# Inhalt


1 Aussagenlogik und Mengentheorie ... 7

**1.1 Aussagenlogik ... 7**

1.1.1 Wahrheitstabellen ... 7

1.1.2 Quantoren ... 10

1.1.3 Rechenregeln ... 11

**1.2 Mengen ... 16**

1.2.1 Definition und Rechenoperationen ... 16

1.2.2 Rechenregeln ... 19

1.2.3 Mengenbeweise ... 20

**1.3 Komplexe Zahlen ... 21**

1.3.1 Zahlenmengen ... 21

1.3.2 Einführung und Definitionen von komplexen Zahlen ... 22

1.3.3 Rechenregeln komplexer Zahlen ... 22

1.3.4 Polarkoordinaten ... 23

1.3.5 Gleichungen und Wurzeln mit komplexen Zahlen ... 25

**1.4 Aufgaben ... 26**

2 Abbildungen ... 29

**2.1 Relationen und Abbildungen ... 29**

**2.2 Eigenschaften von Abbildungen ... 31**

2.2.1 Bild und Urbild ... 31

2.2.2 Surjektv, injektiv und bijektiv ... 32

**2.3 Weitere spezielle Relationen ... 36**

2.3.1 Ordnungsrelationen ... 36

2.3.2 Äquivalenzrelationen ... 38

**2.4 Aufgaben ... 41**

3 Gruppen, Ringe und Körper ... 43

**3.1 Gruppen ... 43**

3.1.1 Halbgruppe, Monoide und Gruppen ... 43

3.1.2 Untergruppen ... 47

3.1.3 Restklassengruppen ... 48

3.1.4 Gruppe der Permutationen ... 48

**3.2 Ringe und Körper ... 52**

3.2.1 Definition Ring ... 52

3.2.2 Definition Körper ... 53

**3.3 Aufgaben ... 58**

4 Vektorräume . . . 61
4.1 Definition von Vektorräumen . . . 61
4.2 Matrizen . . . 63
4.2.1 Definition . . . 63
4.2.2 Rechenoperationen . . . 63
4.3 Lineare Gleichungssysteme . . . 65
4.3.1 Der Gauß-Algorithmus . . . 66
4.3.2 Die inverse Matrix . . . 70
4.4 Eigenschaften von Vektorräumen . . . 73
4.4.1 Lineare (Un)-Abhängigkeit und Erzeugendensysteme . . . 75
4.4.2 Basis und Dimension . . . 79
4.5 Spezielles zu Matrizen . . . 86
4.5.1 Determinante . . . 86
4.5.2 Rang einer Matrix . . . 93
4.6 Spezielle Vektorräume . . . 95
4.6.1 Euklidische Vektorräume . . . 95
4.6.2 Normierte Vektorräume . . . 97
4.6.3 Orthogonale Matrizen und Orthonormalbasis . . . 99
4.7 Aufgaben . . . 103

5 Lineare Abbildungen . . . 107
5.1 Einführung . . . 107
5.2 Darstellung von linearen Abbildungen . . . 111
5.2.1 Abbildungsmatrix . . . 111
5.2.2 Basiswechsel . . . 112
5.2.3 Darstellungsmatrix . . . 113
5.3 Aufgaben . . . 116

6 Normalformen . . . 119
6.1 Definitionen und Einführung . . . 119
6.1.1 Eigenwerte, Eigenvektoren und das charakteristische Polynom . . . 119
6.1.2 Vielfachheiten . . . 123
6.2 Diagonalisieren . . . 128
6.2.1 Definitionen und Algorithmus . . . 128
6.3 Jordan Normalform . . . 132
6.3.1 Definitionen und Algorithmus . . . 132
6.4 Aufgaben . . . 136

# Vorwort

Dieses 136 Seiten starke Lernheft führt dich durch die relevanten Inhalte der Vorlesung *Lineare Algebra* für Lehramt. Dabei steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik" kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln anstatt sie mit Faszination zu entdecken. Wenngleich das folgende Zitat des berühmten Mathematikers Georg Cantor in vielerlei Hinsicht Interpretationsspielraum bietet, nutzen wir es für dieses Lernheft:

*Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit!*

Dieses Lernheft stellt somit eher einen alternativen Zugang zu den Themen dar. Wir sind der Meinung, dass auf dem Verständnis der grundsätzlichen, inhaltlichen Zusammenhänge der Themengebiete aufgebaut werden kann, um den Sinn hinter allen mathematischen Notationen zu begreifen. In Vorlesungen wird üblicherweise der genau gegenteilige Weg eingeschlagen. Man könnte sagen, dieses Lernheft stellt die berühmte *andere Seite der Medaille* dar.

Zusätzlich zu den abgedruckten Erläuterungen und Beispielen findest du an den Seitenrändern insgesamt 137 QR-Codes zu Daniel Jungs Mathe Erklärvideos; direkt auf die jeweiligen Themen abgestimmt. Damit erhältst du zusätzliche Erklärungen, die du in deinem eigenen Tempo so oft ansehen kannst, wie du willst.

Am Ende jedes Kapitels sind Übungsaufgaben zu finden (insgesamt 59 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst. Dabei sind folgende Schwierigkeitsstufen zu finden:

**Level:** Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 21 Aufgaben.**

**Level:** Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 29 Aufgaben.**

**Level:** Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 9 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung. Die Lösungen zu den Aufgaben findest du auf unserer Webseite, die über den jeweils angegebenen QR-Code zu erreichen ist.

Sollte sich doch mal ein Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an dem Lernheft. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der *Lineare Algebra* Veranstaltung.

Feedback

— Dr. Andreas Stahl

# 1 Aussagenlogik und Mengentheorie

## 1.1 Aussagenlogik

Unter der Aussagenlogik verstehen wir einen fundamentalen Teil der Mathematik, welcher sich mit dem Wahrheitsgehalt von Aussagen befasst. Unter einer Aussage verstehen wir daher etwas, bei dem über *wahr oder falsch* entschieden werden kann. Diese Aussage kann als sprachliches Gebilde oder in mathematischer Schreibweise beziehungsweise Konvention existieren. Im Folgenden präsentieren wir verschiedene Aussagen:

Definition
*Aussage*

a) „Die Kinder spielen auf der Straße."

b) „Die letzte Klausur habe ich bestanden."

c) „Die Sonne ist grün."

a) „$1 + 1 = 2$"

b) „$4 \cdot 2 = 9$"

c) „$1 + 2 + ... + 99 = 5050$"

Jeder dieser Aussagen kann nun eindeutig ein Wahrheitsgehalt zugewiesen werden. Dabei gilt das sogenannte **Bivalenzprinzip**, dass eine Aussage nur entweder wahr oder falsch ist. Eine in jedem Fall wahre Aussage bezeichnen wir als **Tautologie** und eine in jedem Fall falsche Aussage als **Kontradiktion**.

### 1.1.1 Wahrheitstabellen

Der Wahrheitsgehalt von Aussagen lässt sich anhand einer **Wahrheitstabelle** darstellen. Bei den Aussagen, die wir in voriger Aufzählung angegeben haben, handelt es sich um elementare Aussagen. Diese können direkt als wahr oder falsch bewertet werden. Neben diesen elementaren Aussagen existieren Verknüpfungen von Aussagen, welche über sogenannte **Junktoren** verbunden werden. Seien $A$ und $B$ zwei beliebige Aussagen, so halten wir die gängigsten Junktoren in folgender Tabelle fest:

Junktoren (1)

Junktoren (2)

| **Bezeichnung** | **Symbol** | **Bedeutung / Sprechweise** |
|---|---|---|
| Negation | $\neg A$ | nicht $A$ |
| Konjunktion | $A \wedge B$ | $A$ und $B$ |
| Disjunktion | $A \vee B$ | $A$ oder $B$ |
| Implikation | $A \rightarrow B$ | wenn $A$, dann $B$ |
| Äquivalenz | $A \leftrightarrow B$ | genau dann $A$, wenn $B$ |
| Kontravalenz | $A \nleftrightarrow B$ | entweder $A$ oder $B$ |

Neben einer formalen mathematischen Betrachtung, führen wir zunächst zum besseren Verständnis ein sprachliches **Beispiel** an. Dazu betrachten wir die beiden Aussagen „$A$ = Die Kinder spielen auf der Straße“ und „$B$ = Die Kinder spielen im Wald“, so folgt:

$\neg A$: Die Kinder spielen nicht auf der Straße.

Auf die Verneinung formaler mathematischer Aussagen werden wir später genauer eingehen.

$A \wedge B$: Die Kinder spielen auf der Straße und im Wald. Der Wahrheitsgehalt dieser Aussage liegt nun an der tatsächlich beobachtbaren Situation. Spielen die Kinder auf einer Waldstraße, ist die Aussage wahr, andernfalls ist sie falsch.

$A \vee B$: Die Kinder spielen auf der Straße oder im Wald. Diese Aussage ist wahr, wenn die Kinder auf der Straße, im Wald oder auf einer Waldstraße spielen. Spielen sie beispielsweise in einem Haus (fernab des Waldes), so ist die Aussage falsch.

$A \rightarrow B$: Wenn die Kinder auf der Straße spielen, dann spielen sie im Wald. Das Spielen auf der Straße impliziert also das Spielen im Wald. Beim Wahrheitsgehalt müssen wir eine Fallunterscheidung treffen. Nehmen wir an, dass die Aussage $A$ wahr ist, so ist die Aussage $A \rightarrow B$ dann wahr, wenn jede Straße im Wald verläuft (Die Aussage ist also höchstwahrscheinlich ohne weitere Einschränkungen falsch). Ist $A$ allerdings bereits falsch, so kann nichts über die Implikation ausgesagt werden. Die Kinder könnten im Wald spielen, aber sie könnten auch im Haus spielen. Aus einer falschen Aussage kann also sowohl eine wahre als auch eine falsche Aussage folgen.

$A \leftrightarrow B$: Die Kinder spielen genau dann auf der Straße, wenn sie im Wald spielen. Der Unterschied bei dieser Aussage zur Implikation liegt in der Betrachtung beider Richtungen. Die Aussage ist dann wahr, wenn jede Straße eine Waldstraße ist und Wald gleichbedeutend mit Straße ist.

$A \nleftrightarrow B$: Die Kinder spielen entweder auf der Straße oder im Wald. Hier bedeutet das Wort „entweder“, dass die Kinder auf der Straße oder im Wald spielen, aber nicht gleichzeitig beides gilt.

Die formalen Bedeutungen dieser Junktoren lassen sich anhand einer **Wahrheitstabelle** oder **Wahrheitstafel** darstellen. In einer Wahrheitstafel wird für jede mögliche Kombination von Wahrheitsgehalten „wahr“ (=w) und „falsch“ (=f) der Wahrheitsgehalt einer komplexeren Aussage dargestellt. Für die oben genannten Junktoren gehen wir diese nun durch:

1) **Negation:**

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

2) **Konjunktion:**

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

3) **Disjunktion:**

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

# 1.2 Mengen

## 1.2.1 Definition und Rechenoperationen

Definition *Menge*

Schreibweisen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem mathematischen Objekt „Menge“ und führen die Definition nach Georg Cantor an:

> Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.
>
> Wir schreiben
>
> $$m \in M: \; m \text{ ist in der Menge } M \text{ enthalten.}$$
> $$m \notin M: \; m \text{ ist nicht in der Menge } M \text{ enthalten.}$$

An dieser Stelle möchten wir die Eigenschaft *wohlunterschieden* hervorheben. Diese bedeutet, dass wir je zwei Elemente einer Menge voneinander unterscheiden können, sodass von den drei Ausdrücken

$$A = \{1, 2\}, \;\; B = \{\text{gelb, gelb, grün}\}, \;\; C = \{1, 2, 3, 1\}$$

nur mit $A$ eine Menge gegeben ist, da wir sowohl in $B$ zwei ununterscheidbare Elemente (gelb und gelb) als auch in $C$ zwei solche Elemente vorfinden (1 und 1).

Element vs. Menge

Übersicht

Teilmengen

Wie für Aussagen existieren diverse Rechenoperationen beziehungsweise Verknüpfungen für Mengen. Diese halten wir in folgender Tabelle für beliebige Mengen $A$, $B$ und $C$ fest:

| **Bezeichnung** | **Formel** | **Sprechweise** | **mathematische Bedeutung** |
|---|---|---|---|
| Teilmengen | $A \subset B$ | $A$ ist echte Teilmenge von $B$ | $x \in A \Rightarrow x \in B$ aber $A \neq B$ |
| | $A \subseteq B$ | $A$ ist eine Teilmenge von $B$ | $x \in A \Rightarrow x \in B$ |
| Gleichheit | $A = B$ | $A$ ist gleich $B$ | $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ |
| Vereinigung | $A \cup B$ | $A$ vereinigt mit $B$ | $x \in A \vee x \in B$ |
| Schnitt | $A \cap B$ | $A$ geschnitten mit $B$ | $x \in A \wedge x \in B$ |
| Differenz | $A \setminus B$ | $A$ ohne $B$ | $x \in A \wedge x \notin B$ |
| Symmetrische Differenz | $A \,\Delta\, B$ | entweder $A$ oder $B$ | $x \in A \nLeftrightarrow x \in B$ |

An vielen Stellen der Lektüre wird kein Unterschied zwischen $\subset$ und $\subseteq$ vorgenommen. Wir werden uns im Laufe der Kapitel auf $\subseteq$ beschränken, falls $\subset$ nicht notwendig ist.

Entsprechend der mathematischen Bedeutung der Rechenoperationen visualisieren wir diese zum besseren Verständnis anhand von Grafiken, den sogenannten **Venn-Diagrammen**:

Nun können wir diese Zahl auch durch den Winkel $\varphi$, der mit der $x-$Achse eingegangen wird und der Länge $r$ des Pfeils beschreiben. Die Länge können wir bereits berechnen, denn es ist

$$r = |z|.$$

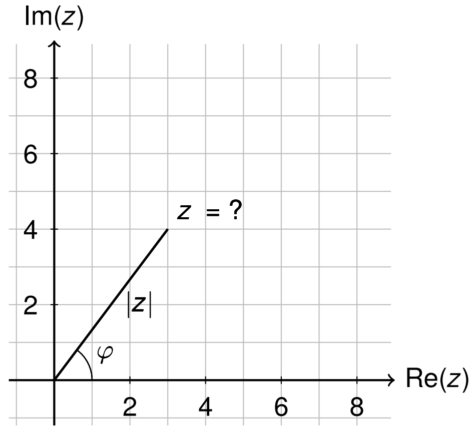
Winkel ablesen (1)

Winkel ablesen (2)

Den Winkel geben wir im sogenannten Bogenmaß an, dies bedeutet $\varphi \in [-\pi, \pi]$, wobei $-\pi = -180°$ und $\pi = 180°$. Eine Festlegung von $\varphi$ zwischen 0 und $2\pi$ ist ebenso üblich. Die Bestimmung von $\varphi$ hängt davon ab, in welchem Quadranten sich die komplexe Zahl befindet. In der Regel lässt sich für $z = a + b \cdot i$ folgende Zuweisung verwenden (gegebenenfalls muss $\varphi$ in den Bereich $[0, 2\pi]$ verschoben werden):

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{, falls } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{, falls } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{, falls } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{, falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Für $z = 0$ wählen wir per Konvention $\varphi = 0$. Die neue Darstellung ist damit so zu interpretieren:




Polarkoordinaten

Eulersche Formel

Additions-theoreme

Die Darstellung in Polarkoordinaten folgt mit den Zusammenhängen von Sinus und Cosinus:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

Mit der **eulerschen Formel** folgt mit der Exponentialfunktion

$$\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = e^{i \cdot \varphi}.$$

**Beispiel - Polarkoordinaten:** Betrachten wir die komplexe Zahl $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$. Dann berechnen wir zunächst den Betrag durch

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Anschließend bestimmen wir den Winkel durch

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60° = \frac{\pi}{3}.$$

Damit gilt

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

**Beispiel - Urbild:** Betrachten wir erneut das obige Beispiel und definieren die drei Mengen $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{4\}$. Um das Urbild der Mengen zu bestimmen, müssen wir diejenigen Elemente des Definitionsbereichs $X$ finden, die auf die enthaltenen Elemente abgebildet werden beziehungsweise deren abgebildeter Wert in den jeweiligen Mengen enthalten ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{a, d\} \\ f^{-1}(B) &= \{b, c\} \\ f^{-1}(C) &= \emptyset \end{aligned}$$

Es ist durchaus möglich, dass ein Element im Zielbereich nicht getroffen wird, sodass das entsprechende Urbild, hier $f^{-1}(C)$, die leere Menge ergibt. Außerdem sagt die Größe der Menge nichts über die Größe des Urbilds aus. Das Urbild der Menge $A = \{1\}$ enthält zwei Elemente, da zwei Elemente von $X$ auf 1 abgebildet werden.

### 2.2.2 Surjektv, injektiv und bijektiv

injektiv & surjektiv

Schaubild

Bijektivität

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den drei Begriffen *surjektiv*, *injektiv* und *bijektiv*, welche teilweise unter anderem Namen bereits bei den Relationen definiert wurden.

> Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir nennen $f$ genau dann
>
> $$\begin{array}{lll} \text{surjektiv,} & \text{wenn} & \forall y \in Y\ \exists x \in X \quad : \quad f(x) = y \\ \text{injektiv,} & \text{wenn} & \forall x_1, x_2 \in X \quad : \quad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \\ \text{bijektiv,} & \text{wenn} & \forall y \in Y\ \exists! x \in X \quad : \quad f(x) = y \end{array}$$

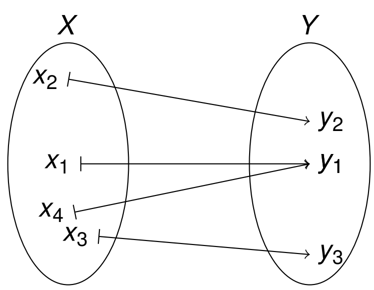
Betrachten wir die einzelnen Begriffe, so lassen sich Parallelen zu den Eigenschaften von Relationen ziehen:

**Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn sie (als Relation interpretiert) rechtstotal ist.**

Äquivalente Bedingungen/Formulierungen sind:

1. Wenn zu jedem Element des Zielbereichs ein Element des Definitionsbereichs existiert, das darauf abgebildet wird.
2. Wenn $f(X) = Y$.
3. Wenn für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(B)$ nicht leer ist. Insbesondere für jede einelementige Menge $B$.

Visuell lässt sich Surjektivität wie folgt veranschaulichen (alle Elemente im Zielbereich $Y$ werden mindestens einmal getroffen):



## 2.3 Weitere spezielle Relationen

Speziell im Fall $X = Y$ sprechen wir von einer $X$-Relation. Für diese Art von Relationen lassen sich verschiedene Eigenschaften definieren, die wir in folgender Tabelle festhalten:

| **Eigenschaft** | **Bedeutung** | **in Worten** |
|---|---|---|
| Reflexivität | $\forall x \in X : x \sim x$ | Jedes Element steht in Relation mit sich selbst. |
| Symmetrie | $\forall x, y \in X : (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$ | Wenn $x$ mit $y$ in Relation steht, dann auch $y$ mit $x$. |
| Asymmetrie | $\forall x, y \in X : (x \sim y) \Rightarrow \neg(y \sim x)$ | Wenn $x$ mit $y$ in Relation steht, dann steht $y$ nicht mit $x$ in Relation. |
| Antisymmetrie | $\forall x, y \in X : (x \sim y \ \wedge \ y \sim x) \Rightarrow (x = y)$ | Wenn $x$ in Relation zu $y$ steht und $y$ in Relation zu $x$, dann sind $x$ und $y$ gleich. |
| Vollständigkeit | $\forall x, y \in X : x \sim y \ \vee \ y \sim x$ | Für je zwei Elemente steht $x$ in Relation zu $y$ oder $y$ in Relation zu $x$. |
| Trichotomie | $\forall x, y \in X : (x \sim y) \vee (y \sim x) \vee (x = y)$ | Für je zwei Elemente steht $x$ in Relation zu $y$ oder $y$ in Relation zu $x$ oder die Elemente sind gleich. |
| Transitivität | $\forall x, y, z \in X : (x \sim y \ \wedge \ y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$ | Wenn $x$ in Relation zu $y$ steht und $y$ in Relation zu $z$, dann steht auch $x$ in Relation zu $z$. |

### 2.3.1 Ordnungsrelationen

In diesem Abschnitt stellen wir drei Ordnungsrelationen vor und werden anhand eines Beispiels eine dieser Relationen beweisen. Eine Ordnungsrelation erlaubt, es die Elemente einer Menge zu vergleichen. Existiert zu einer gegebenen Menge $X$ eine Ordnungsrelation, so sprechen wir von einer geordneten Menge $X$ beziehungsweise genauer einem geordnetem Paar $(X, R)$.

Seien $R_1$, $R_2$ und $R_3$ Relationen einer Menge $X$, so sprechen wir bei $R_1$ von einer **schwachen Totalordnung**, wenn:

1. $R_1$ ist antisymmetrisch.
2. $R_1$ ist transitiv.
3. $R_1$ ist vollständig.

# 4.2 Matrizen

## 4.2.1 Definition

In diesem Abschnitt führen wir zunächst das mathematische Objekt **Matrix** ein.

Aufbau

> Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{K}$ ein Körper und für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Wir definieren eine $m \times n$-**Matrix** durch folgendes Rechteck-Schema mit $m \cdot n$ Elementen:
>
> $$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & m \text{ Zeilen} \\ n \text{ Spalten} & \end{array}$$
>
> Die Elemente $a_{ij}$ des Körpers bezeichnen wir als **Einträge** der Matrix und schreiben kurz für eine $m \times n$ Matrix $M$ mit Einträgen in $\mathbb{K}$ : $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Ist $m = n$ so sprechen wir von **quadratischen Matrizen**.

Quadratische Matrix

Einheitsmatrix

Im Folgenden halten wir zwei spezielle quadratische Matrizen fest:

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4.2.2 Rechenoperationen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Verknüpfungen von Matrizen. Dabei betrachten wir die Addition sowie die Multiplikation. Die Addition bildet sich auf sehr natürliche Weise, in dem wir Eintrag für Eintrag einer Matrix durchgehen und den entsprechenden Eintrag einer anderen Matrix komponentenweise addieren. Dies ist also nur möglich, wenn beide Matrizen sowohl in der Anzahl der Zeilen als auch in der Anzahl der Spalten übereinstimmen.

**Beispiel - Matrixaddition:** Betrachten wir die beiden $2 \times 3$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Matrixaddition

so können wir in diesem Fall $A + B$ und $B + A$ berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 4+2 & 5+2 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+4 & 2+5 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir führen zuerst die Schritte II'=II-I sowie III'=III-3· I durch und erhalten damit bereits die untere Dreiecksgestalt.

Mit der dritten Zeile eliminieren wir die 1 in der zweiten Zeile der dritten Spalte.

Da hier bereits eine 0 steht, brauchen wir dort keine weitere Rechnung.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-1) \end{array}$$

Nun bringen wir die Matrix in Diagonalgestalt, indem wir von unten rechts nach oben links jeweils die oberhalb der Diagonaleinträge liegenden Zahlen zu 0 verändern. Hier also mit der eingekreisten 1 die durch ein Quadrat umschlossenen Werte zu 0 verändern. Dazu berechnen wir II' = II-III und erhalten:

Mit der zweiten Zeile eliminieren wir die 1 der zweiten Spalte in der ersten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

Wir müssen nur die 1 in der zweiten Spalte und ersten Zeile, also $a_{12}$, eliminieren. Dazu rechnen wir I' = I-II und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da bereits alle Diagonaleinträge auf der linken Seite 1 sind und dort somit die Einheitsmatrix steht, benötigen wir keine weiteren Divisionen innerhalb der Zeilen. Die inverse Matrix lesen wir auf der rechten Seite ab und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt außerdem, dass

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

# 6 Normalformen

## 6.1 Definitionen und Einführung

Ziel dieses Abschnitts ist die Überführung von Matrizen in eine für uns beziehungsweise für einen Computer angenehme Form. Dabei bedeutet angenehm, dass wir sie als Mensch schnell verstehen oder berechnen können und für den Computer, dass dieser weniger Rechenschritte und weniger Speicherplatz benötigt. Um Matrizen in solche Formen zu bringen, betrachten wir zunächst die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren.

Eigenwerte

### 6.1.1 Eigenwerte, Eigenvektoren und das charakteristische Polynom

Sei $V = \mathbb{K}^n$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung (auch Endomorphimus genannt), so haben wir bereits gesehen, dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, sodass $f(v) = A \cdot v$ für alle $v \in V$ gilt. Wir nennen den Skalar $\lambda$ einen **Eigenwert** von $f$ beziehungsweise von $A$, falls ein Vektor $v \in V \backslash \{0\}$ existiert, sodass

$$f(v) = \lambda \cdot v \quad \text{beziehungsweise} \quad A \cdot v = \lambda \cdot v$$

gilt. Den zugehörigen Vektor $v$ nennen wir **Eigenvektor** zum Eigenwert $\lambda$.

$v = 0$ kann somit **nie** Eigenvektor sein!

Da wir jede so betrachtete lineare Abbildung $f$ durch eine Matrix darstellen können, schreiben wir die folgenden Ergebnisse und Definition stets für eine Matrix auf. Dabei lassen sich diese auch für die lineare Abbildung $f$ interpretieren.

Sei $V = \mathbb{K}^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Menge an Eigenvektoren bilden fast (es fehlt der Nullvektor) eine bekannte Struktur, sodass wir den **Eigenraum** einer Matrix $A$ zu gegebenem Eigenwert $\lambda$ definieren durch:

$$E(\lambda, A) = \{v \in V \mid v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda \text{ der Matrix A}\} \cup \{0\}$$

Umformen der Bedingung für Eigenvektoren liefert eine äquivalente Definition des Eigenraums:

$$\begin{aligned}
& A \cdot v &&= \lambda \cdot v \\
\Leftrightarrow\ & A \cdot v - \lambda \cdot v &&= 0 \\
\Leftrightarrow\ & A \cdot v - \lambda \cdot I_n \cdot v &&= 0 \\
\Leftrightarrow\ & (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v &&= 0
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$E(\lambda, A) = ker(A - \lambda \cdot I_n).$$

Charakteristisches Polynom

Dieser Zusammenhang führt zu folgender Definition:

> Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so definieren wir das **charakteristische Polynom** durch
>
> $$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n).$$

Durch das charakteristische Polynom lassen sich die Eigenwerte einer Matrix auf elegante Weise bestimmen, denn es gilt:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert der Matrix } A \Leftrightarrow \lambda \text{ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms } \chi_A(\lambda).$$

Eigenwerte $2 \times 2$

Eigenwerte $3 \times 3$

**Beispiel - Eigenwerte und Eigenvektoren:** Betrachten wir die Matrix $A \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun nachrechnen, dass $v = (1 \ -2 \ 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist, denn es gilt

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\cdot 2+3 \\ 4-2\cdot 5+6 \\ 3-2\cdot 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overbrace{0}^{=\lambda} \cdot v.$$

Diese Rechnung basiert so jedoch auf reinem Raten. Wir erhalten alle Eigenwerte mit folgendem Vorgehen:

1. Ziehe $\lambda$ auf der Diagonalen ab.
2. Bilde die Determinante dieser Matrix und erhalte somit das charakteristische Polynom.
3. Setze das charakteristische Polynom gleich 0.

In unserem Fall betrachten wir also die Matrix

$$A - \lambda \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Mit der Regel von Sarrus erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)\cdot(5-\lambda)\cdot(1-\lambda)+2\cdot 6\cdot 3+3\cdot 4\cdot 2-3\cdot(5-\lambda)\cdot 3-2\cdot 6\cdot(1-\lambda)-(1-\lambda)\cdot 4\cdot 2 \\ &= (1-2\cdot\lambda+\lambda^2)\cdot(5-\lambda)+36+24-9\cdot(5-\lambda)-12\cdot(1-\lambda)-8\cdot(1-\lambda) \\ &= 5-10\cdot\lambda+5\cdot\lambda^2-\lambda+2\cdot\lambda^2-\lambda^3+60-45+9\cdot\lambda-20+20\cdot\lambda \\ &= -\lambda^3+7\cdot\lambda^2+18\cdot\lambda. \end{aligned}$$