Inhalt

1 Basics

1.1 Mengen

1.1.1 Definition und Mengenoperationen

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf das mathematische Objekt „Menge“ ein und beschreiben die wichtigsten Mengenoperationen. Nach der Definition von *Georg Cantor* ist eine Menge eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Das bedeutet, dass wir jegliche Objekte in einer Menge zusammenfassen können und so auch eine Menge erhalten, wenn wir die einzelnen Objekte unterscheiden können. Diese beschreiben wir konventionsgemäß mit geschweiften Klammern. Beispielsweise sind

Definition

Schreibweisen

- $A = \{\text{rot, blau, grün, gelb}\}$
- $B = \{\text{groß, klein, stark, schwach}\}$
- $C = \{1, 2, 3, 4\}$
- $D = \{\text{grün},\ 2,\ \pi,\ \sqcap,\ \text{qprt}\}$
- $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$

jeweils Mengen. Dabei ist es unerheblich, ob sich in dieser Menge Farben, Zahlen oder auch auf den ersten Blick unlogische Zeichen oder Textfolgen befinden. Hingegen sind

- $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 0\}$
- $H = \{\text{groß, klein, sehr klein, winzig, riesig, groß, gigantisch}\}$

keine Mengen, da sie jeweils zwei ununterscheidbare Elemente beinhalten. In der Menge G ist zweimal das Element „0“ zu finden und in der Menge H tritt das Element „groß“ ebenfalls doppelt auf. Für solche Objekte gibt es verschiedene Rechenoperationen, welche wir in folgender Tabelle beschreiben:

Rechenregeln 1

Rechenregeln 2

Teilmengen

Mengen-operation	**Bedeutung**
$\emptyset$	Beschreibt die leere Menge, die keine Elemente enthält.
$x \in M$	Beschreibt, dass ein Element x in einer Menge M enthalten ist.
$x \notin M$	Beschreibt, dass ein Element x nicht in einer Menge M enthalten ist.
$M \subset N$	Beschreibt die Teilmengeneigenschaft. M ist also eine Teilmenge der Menge N und somit sind alle Mengen von M auch in N enthalten.

Übersicht

Beispiel 1

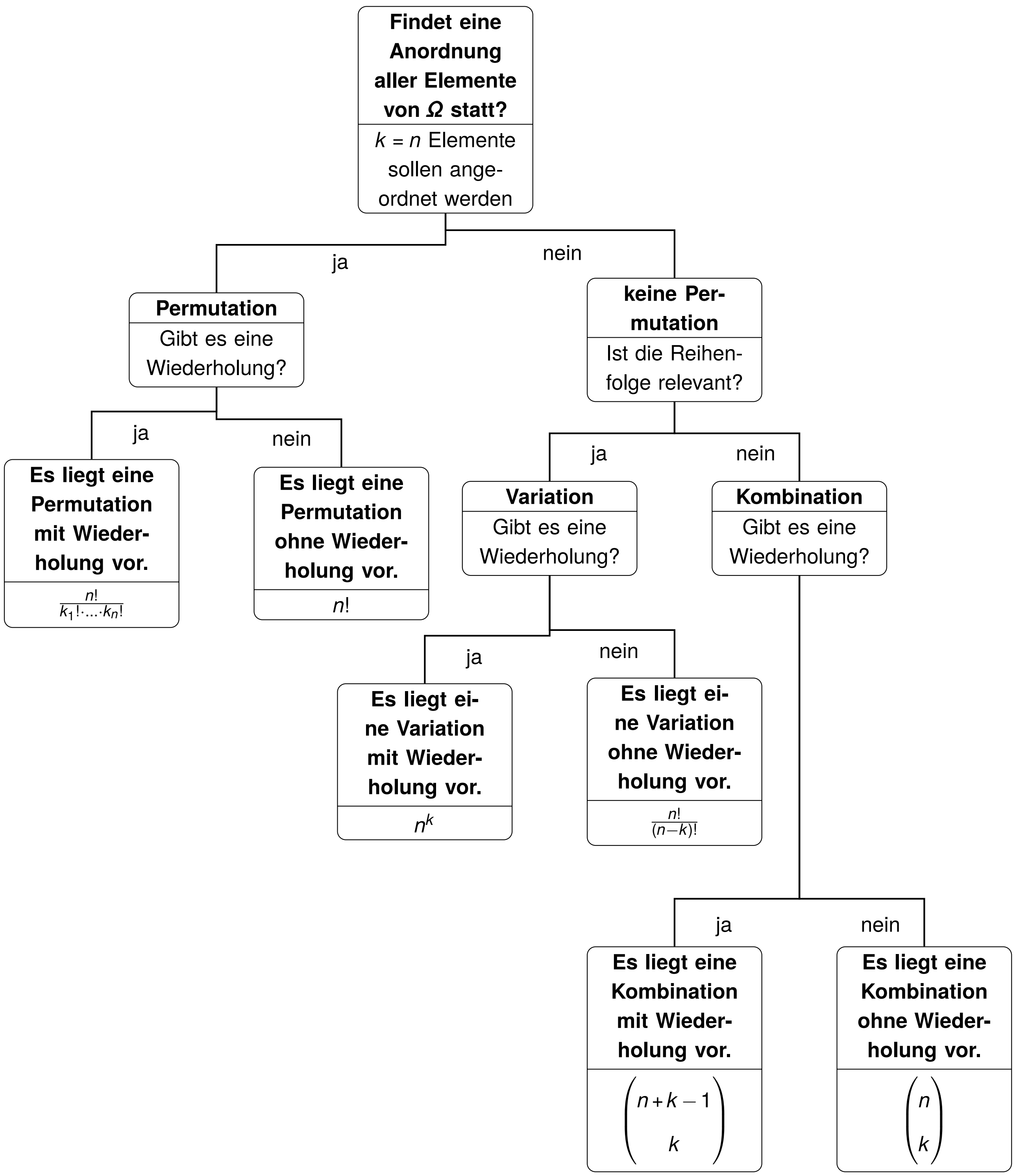
Beispiel 2

Beispiel 3

Beispiel 4

Beispiel 5

Nachfolgend betrachten wir einen **Entscheidungsbaum**, mit welchem ihr trainieren könnt, die richtige Gegebenheit zu erkennen:



Wir werden nun mit Hilfe des Entscheidungsbaumes einige Beispiele behandeln, um ein Gefühl für diese Aufgabenstellungen zu bekommen. Die einzige Herausforderung besteht darin, den richtigen Fall zu finden!

2.6 Stochastische Unabhängigkeit

2.6.1 Definition und Anwendung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der stochastischen Unabhängigkeit. Wir nennen zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses hat. Wir definieren:

> Seien zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gegeben. Diese sind genau dann **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:
> $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Äquivalent lässt sich die stochastische Unabhängigkeit durch bedingte Wahrscheinlichkeiten definieren. Seien wie oben zwei Ereignisse A und B gegeben, so sind diese Ereignisse genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B).$$

Das Wissen über das Eintreten des Ereignisses A (bzw. B) hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs des anderen Ereignisses. Bei mehr als zwei Ereignissen sprechen wir von Unabhängigkeit, wenn jede endliche Kombination von Ereignissen stochastisch unabhängig ist.

Beispiel:
Seien die beiden Ereignisse

Beispiel 1

Beispiel 2

$$\begin{aligned} A: &\quad \text{Wurf einer ungeraden Zahl} &= \{1,3,5\} \\ B: &\quad \text{Wurf einer Zahl größer zwei} &= \{3,4,5,6\} \end{aligned}$$

beim Werfen eines fairen Würfels gegeben. Um die Frage der Unabhängigkeit beantworten zu können, berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\{3,5\}) &= \tfrac{1}{3} \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{1,3,5\}) &= \tfrac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{3,4,5,6\}) &= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

und die Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

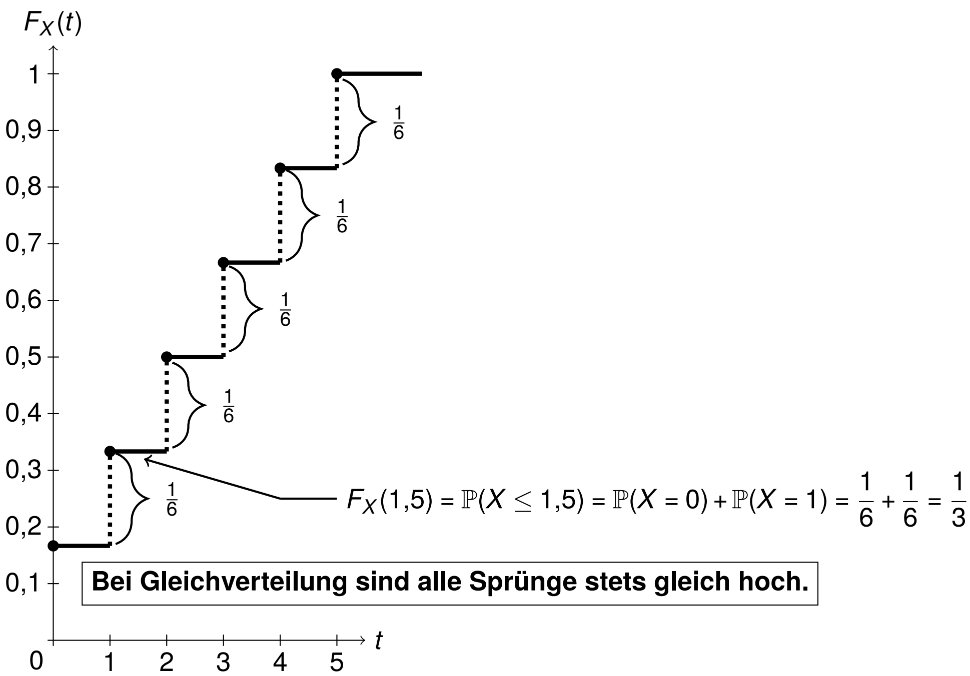
Beispiel:
Betrachten wir die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} A: &\quad \text{Wurf einer ungeraden Zahl} &= \{1,3,5\} \\ B: &\quad \text{Wurf einer Primzahl} &= \{2,3,5\}, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\{3,5\}) &= \tfrac{1}{3} \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{1,3,5\}) &= \tfrac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{2,3,5\}) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Charakterisierend sehen wir, dass jedem Wert $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$ zugeordnet wird. Ebenso erkennen wir die Eigenschaft von diskreten Verteilungen, dass bei der Zähldichte „Lücken“ zwischen den einzelnen Punkten liegen. Die zugehörige Verteilungsfunktion für $n = 6$ beschreibt das nächste Diagramm:



Im Folgenden sei $X \sim U(a,b)$, da man im allgemeinen Fall keine zusätzlichen Informationen erhält. Es folgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad v(X) = 0$$

Wie bei der Definition bereits erwähnt, kommt die Gleichverteilung stets dann zum Einsatz, wenn es sich im Experiment um endlich viele gleichwahrscheinliche Elementarereignisse handelt. Ein solches Beispiel haben wir auf den vorangegangenen Seiten mehrfach angeführt: Wurf eines fairen Würfels, Wurf einer fairen Münze etc. Mit den Formeln lassen sich die zuvor errechneten Werte des Erwartungswerts und der Varianz überprüfen. Sei $X \sim U(1,6)$, so gilt

$$\begin{aligned}
f(k) &= \frac{1}{n} &&= \frac{1}{6} \\
F_X(t) &= \frac{\lfloor t \rfloor - 1 + 1}{6 - 1 + 1} &&= \frac{\lfloor t \rfloor}{6} \\
\mathbb{E}[X] &= \frac{1+6}{2} &&= 3{,}5 \\
Var(X) &= \frac{6^2 - 1}{12} &&= \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

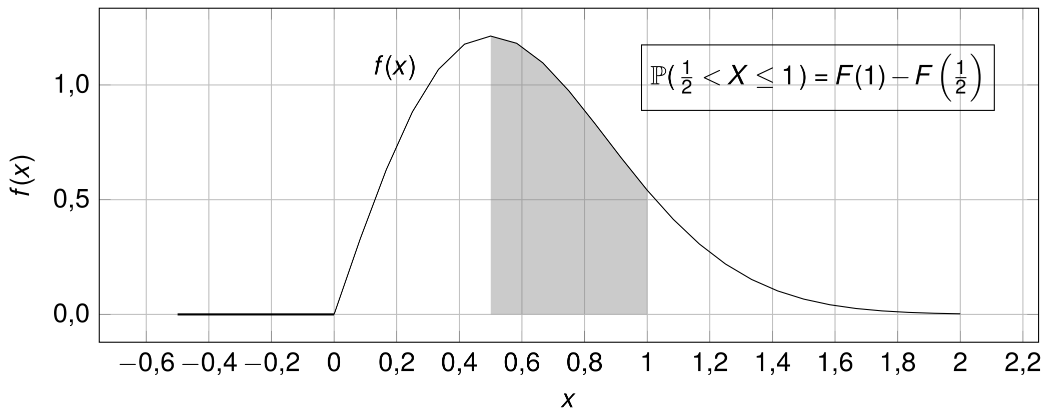
Beachte: Bei einem gezinkten Würfel sind die Elementarereignisse nicht mehr gleich wahrscheinlich und somit nicht gleichverteilt!

Beziehungsweise somit die Eigenschaften

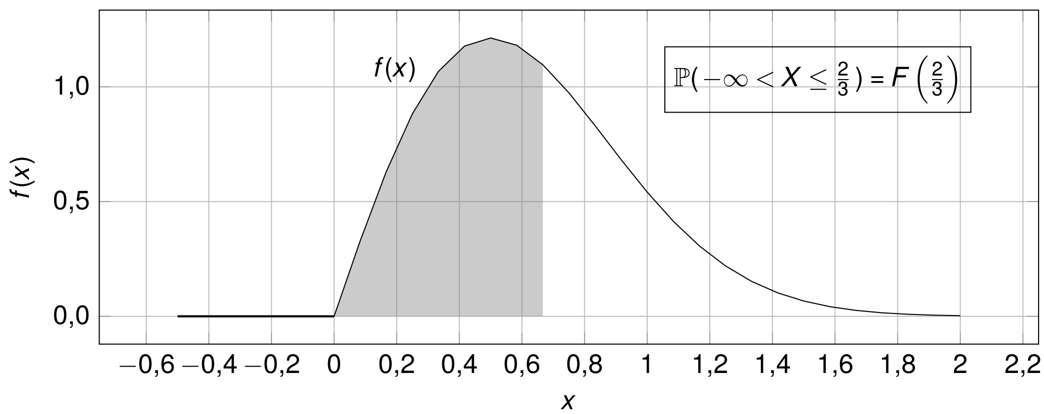
$$
\begin{array}{rccccc}
\text{i)} & \mathbb{P}(a < X \leq b) & = & F_X(b) - F_X(a) & = & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
\text{ii)} & \mathbb{P}(-\infty < X \leq t) & = & F_X(t) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^t f(x)\,\mathrm{d}x \\
\text{iii)} & \mathbb{P}(X > t) & = & 1 - F_X(t) & = & \displaystyle\int_t^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{array}
$$

Graphisch lassen sich obige Zusammenhänge folgendermaßen anhand von Beispielen darstellen. In jeder Skizze ist der Graph einer Wahrscheinlichkeitsdichte eingetragen und die grau hinterlegte Fläche visualisiert das Integral:

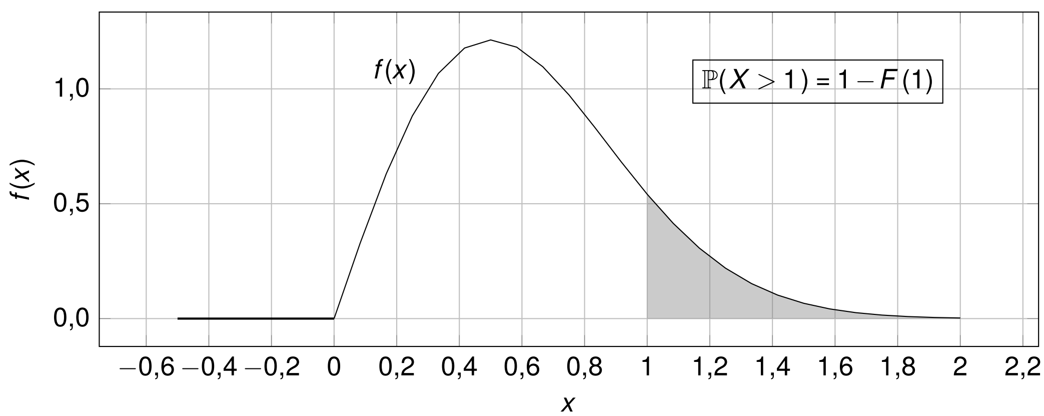
i):



ii):



iii)



3.4 Parametrische Einstichproben-Tests

Im Folgenden betrachten wir verschiedene Tests, beschreiben die Situationen, in denen derjenige Test benutzt wird und welche Statistik T sowie kritischen Werte dieser Test benutzt. Diese Tests unterteilen wir zunächst in **Einstichproben-Tests** und **Zweistichproben-Test**. Wie der Name bereits sagt, handelt es sich bei der ersten Klasse um Tests, die sich auf eine Stichprobe beziehen und Vermutungen aus dieser Stichprobe heraus nachweisen bzw. widerlegen wollen. In der zweiten Klasse handelt es sich um zwei Stichproben, die verglichen werden sollen. Hier sind meist Vermutungen über den Vergleich von Parametern in beiden Stichproben von Belang. Das zweite Unterscheidungsmerkmal ist die Art des Tests. Hier bilden wir zwei verschiedene Klassen: Die **parametrischen Tests** und die **nicht-parametrischen Tests**. In diesem Abschnitt betrachten wir die gängigen parametrischen Einstichproben-Tests.

Diese sind der...

1. Einstichproben Gauß-Test für den Erwartungswert μ.
2. Einstichproben-t-Test für den Erwartungswert μ.
3. Einstichproben-χ^2-Streuungstest für die Varianz σ^2.
4. approximative Einstichproben-Binomialtest für den Anteilswert p.

3.4.1 Einstichproben Gauß-Test für den Erwartungswert

Anhand des gängigen Vorgehens, welches wir zu Beginn des Kapitels dargestellt haben, füllen wir die einzelnen Schritte nun mit speziellem Inhalt. Unter einem Einstichproben Gauß-Test versteht man die Tests (einseitige und zweiseitige) des Erwartungswerts μ bei normalverteilten Stichprobenvariablen mit bekannter Varianz σ oder einer hinreichend großen Stichprobe ($n \geq 30$) bei bekannter Varianz. Es gilt:

Schritt	rechtsseitiger Test	linksseitiger Test	zweiseitiger Test
1. Aufstellen der Hypothesen	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
2. Stichprobe und Signifikanzniveau vorliegen haben	α und $(x_1, ..., x_n)$		
3. Teststatistik wählen	$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$		
4. Prüfgröße berechnen	$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$		
5. Kritischen Wert bestimmen	$z_{1-\alpha}$	$z_\alpha = -z_{1-\alpha}$	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
6. H_0 verwerfen, wenn	$t > z_{1-\alpha}$	$t < -z_{1-\alpha}$	$\lvert t\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Voraussetzungen der one-way ANOVA:

- Die Stufen untereinander sind unabhängig.
- Die Vorhersagefehler sind normalverteilt.
- Die Varianzen der verschiedenen Stufen sind gleich.

Die vorkommenden Stichprobenvariablen bezeichnen wir in diesem Abschnitt mit Y_{ij}. Die Realisationen halten wir in der Regel in einer Kontingenztafel fest und bezeichnen die Einträge mit y_{ij} mit Umfängen $i = 1, ..., k$ und $j = 1, ..., n_i$. Die Grenze n_i bedeutet hier die Anzahl der beobachteten Größen der Stufe i des Faktors. Dies lässt sich wie folgt darstellen:

Daten one-way ANOVA				
Stufe 1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n_1}
Stufe 2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
Stufe k	y_{k1}	y_{k2}	$\cdots$	y_{kn_k}

Ähnlich zur Berechnung der Randverteilungen führen wir den Mittelwert der Randverteilungen $\bar{y}_{i\bullet}$ und das Gesamtmittel $\bar{y}_{\bullet\bullet}$ ein. Die Gesamtanzahl definieren wir dabei durch $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i\bullet} &= \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\ \bar{y}_{\bullet\bullet} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot y_{i\bullet} \end{aligned}$$

sowie eine korrigierte Faktorstufenvarianz

$$s_{i\bullet}^{*2} = \frac{1}{n_i - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2.$$

Für die one-way ANOVA werden die mittleren Abweichungsquadrate benötigt:

$$\begin{aligned} \text{MQA} &= \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \\ \text{MQR} &= \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \cdot s_{i\bullet}^{*2} \end{aligned}$$

Dabei misst MQA Abweichungen, die aus dem Einfluss des Faktors stammen, während MQR Abweichungen innerhalb einer Faktorstufe bewertet. Das allgemeine Vorgehen der one-way-ANOVA halten wir wie folgt fest:

Schritt	**One-way ANOVA**
1. Aufstellen der Hypothesen	$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ $H_1: \quad \mu_i \neq \mu_j$ für ein $i \neq j$
2. Stichprobe und Signifikanzniveau vorliegen haben	α und (y_{ij}) für $i = 1, ..., k$ und $j = 1, ..., n_i$
3. Teststatistik wählen und Prüfgröße berechnen	$t = \dfrac{MQA}{MQR} \sim \mathscr{F}(k-1, N-k)$
4. Kritischen Wert bestimmen	$f_{k-1, N-k, 1-\alpha}$
5. H_0 verwerfen, wenn	$t > f_{k-1, N-k, 1-\alpha}$

Schritt	**rechtsseitiger Test**	**linksseitiger Test**	**zweiseitiger Test**
1. Aufstellen der Hypothesen	$H_0: \tilde{x} \leq \tilde{y}$ $H_1: \tilde{x} > \tilde{y}$	$H_0: \tilde{x} \geq \tilde{y}$ $H_1: \tilde{x} < \tilde{y}$	$H_0: \tilde{x} = \tilde{y}$ $H_1: \tilde{x} \neq \tilde{y}$
2. Stichprobe und Signifikanzniveau vorliegen haben	α und $(x_1,...,x_n)$ und $(y_1,...,y_n)$		
3. Teststatistik wählen	$W = \min(W_+, W_-)$		
4. Prüfgröße berechnen	$w = \min(W_+, W_-)$		
5. Kritischen Wert bestimmen	$\omega_{n,1-\alpha}$	$\omega_{n,\alpha}$	$\omega_{1-\frac{\alpha}{2}}$
6. H_0 verwerfen, wenn	$w > \omega_{n,1-\alpha}$	$w < \omega_{n,\alpha}$	$w > \omega_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$

Im Falle einer Stichprobe von $n > 20$ kann man zeigen, dass die standardisierte Statistik

$$T = \sqrt{24} \cdot \frac{W - \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+1)}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

gilt. Somit kann in diesem Fall die Statistik T gebildet werden und mit den entsprechenden kritischen Werten $z_{1-\alpha}$, $-z_{1-\alpha}$ oder $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ verglichen werden.

Beispiel Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test:
Betrachten wir einen Supermarkt, der eine Personengruppe von 8 Personen gebeten hat, sowohl mit Hungergefühl als auch ohne Hungergefühl einzukaufen und die ausgegebene Summe zu notieren. Dies führte zu folgenden Ergebnissen:

hungriger Einkauf

Person	hungrig	satt	D_k	$\lvert D_k \rvert$	R_k
1	39	42	-3	3	2,5
2	71	68	3	3	2,5
3	69	63	6	6	6
4	72	68	4	4	4
5	75	80	-5	5	5
6	111	94	17	17	8
7	63	61	2	2	1
8	97	90	7	7	7

Dabei haben wir aus den Angaben „hungrig" und „satt" bereits die Differenzen gebildet. Da der Wert 3 zweifach auftritt und zwar in den Rängen 2 und 3, weisen wir jeweils den Mittelwert $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ zu.

Kann aufgrund dieser Daten die Behauptung, dass die Mediane gleich sind, also dass das Hungergefühl keinen signifikanten Einfluss auf das Kaufverhalten hat, zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ widerlegt werden?

Wir wenden zur Bearbeitung den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test an:

1. Aus dem Text erkennen wir, dass wir

   - die **Gleichheit** der Mediane **widerlegen** möchten (spricht jeweils für H_0).

   Da wir die Gleichheit nicht zugunsten einer Richtung widerlegen möchten, wählen wir den zweiseitigen Test und formulieren $H_0 : \tilde{x} = \tilde{y}$ und $H_1 : \tilde{x} \neq \tilde{y}$.

2. Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 5\%$.

3. Die Teststatistik lautet $W = \min(W_+, W_-)$.

4. Da wir in der Aufgabenstellung bereits die Differenzen und Ränge gegeben haben, folgt

$$\begin{aligned} w_+ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_k - y_k > 0\}} \cdot R_k &= 1+2{,}5+4+6+7+8 &= 28{,}5 \\ w_- &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_k - y_k < 0\}} \cdot R_k &= 2{,}5+5 &= 7{,}5. \end{aligned}$$

   Somit erhalten wir die Prüfgröße $w = \min(w_+, w_-) = 7{,}5$.

5. Für den kritischen Wert betrachten wir die Tabelle des Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test:

kritischer Wert: $\omega_{n,1-\alpha}$

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}025$
5	2	-
6	2	0
7	3	2
8	5	3
9	8	5
10	10	8
11	14	10
12	17	13
13	21	17
14	26	21

Für $n = 8$ (Anzahl der Personen) und $\alpha = 5\%$ beziehungsweise $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$ erhalten wir

$$\omega_{n,1-\frac{\alpha}{2}} = \omega_{8,0{,}975} \overset{\text{aus Tab.}}{=} 3,$$

da in der Tabelle die Werte für $\omega_{n,1-\alpha}$ aufgelistet sind.

6. Wir lehnen die Nullhypothese zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ ab, denn $w = 7{,}5 > 3 = \omega_{n,0{,}975}$.

3.6.5 Wilcoxon-Rangsummen-Test

Als weiteren nichtparametrischen Test betrachten wir den Wilcoxon-Rangsummen-Test oder auch Mann-Whitney-U-Test. Genau genommen handelt es sich um zwei Tests, die unter diesen Namen zusammengefasst werden. Ziel der Tests ist eine Aussage über zwei Stichprobenvariablen und deren Verteilung. Mit Hilfe der Tests soll zu einem gegebenen Signifikanzniveau beurteilt werden, ob sich die Verteilung nur hinsichtlich einer Verschiebung unterscheiden, also für $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung $F_X(t-a) = F_Y(t)$ gilt. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass ein zufälliger Wert der ersten Stichprobe systematisch um einen festen Wert größer oder kleiner als ein zufälliger Wert der zweiten Stichprobe ist. Aufgrund der zu widerlegenden These unterstellt der Wilcoxon-Rangsummen-Test eine gleiche Varianz der Zufallsvariablen X und Y sowie Unabhängigkeit in den Kopien $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m$.