Inhalt

1 Wichtige Begriffe

In dieser Übersicht findest du mathematische und physikalische Begriffe, mit denen du in diesem Lernheft arbeiten wirst.

Begriffe	**Erklärung**	**Beispiele**
	Größen und Einheiten	
Physikalische Größen	• objektiv messbare Eigenschaften von Zuständen und Vorgängen • Produkt eines Zahlenwerts mit einer Einheit	Bei der Länge l = 25 cm ist 25 der Zahlenwert und cm (Zentimeter) die Einheit.
Basisgröße/-einheit	• Unterscheidung zwischen Basisgröße und Basiseinheit • sind im internationalen Einheitensystem SI (Systeme International) festgelegt	**Basisgröße mit Formelzeichen**: Länge l, Masse m **Basiseinheit mit Zeichen**: Meter m, Kilogramm kg
Abgeleitete Größe und Einheiten	• setzen sich aus Basisgrößen und deren Einheiten zusammen	Kraft = Masse · Beschleunigung $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
Umrechnung von Einheiten	• Einheiten können in kleinere oder größere Einheiten oder andere Maßsysteme umgerechnet werden	$1\text{kg} = 1\text{kg} \cdot \frac{1000\text{g}}{1\text{kg}} = 1000\text{g}$ $1\text{l} = 1\text{dm}^3 = 10\text{dl} = 0{,}01\text{m}^3$
	Gleichungen und Formeln	
Gleichungen	• beschreiben Abhängigkeit mathematischer oder physikalischer Größen	$20 + 8 = 100 - 72$ $x + 16 = 24$
Formeln	• Technische oder physikalische Gleichungen mit Formelzeichen	s(Weg) = v(Geschwind.) · t(Zeit)

2 Terme und Gleichungen

2.1 Grundlagen

Wir unterscheiden grundsätzlich die vier folgenden Grundrechenarten mit ihren jeweiligen Komponenten. Macht euch mit den Begrifflichkeiten vertraut, da diese im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen und erwähnt werden.

Grundrechen-
arten

Grundrechenart	**Komponenten**
Addition „+“	$\underbrace{2}_{\textbf{Summand}} + \underbrace{4}_{\textbf{Summand}} = \underbrace{6}_{\textbf{Summe}}$
Subtraktion „−“	$\underbrace{7}_{\textbf{Minuend}} - \underbrace{3}_{\textbf{Subtrahend}} = \underbrace{4}_{\textbf{Differenz}}$
Multiplikation „·“	$\underbrace{2}_{\textbf{Faktor}} \cdot \underbrace{3}_{\textbf{Faktor}} = \underbrace{6}_{\textbf{Produkt}}$
Division „:“ oder „÷“	$\underbrace{4}_{\textbf{Dividend}} : \underbrace{2}_{\textbf{Divisor}} = \underbrace{2}_{\textbf{Quotient}}$

Nachfolgend findet ihr eine Übersicht über die wichtigsten und euch bekannten Zahlenmengen.

Zahlenmengen

- Natürliche Zahlen[1]

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ → Natürliche Zahlen sind ganze, positive Zahlen

- Ganze Zahlen

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ → Ganze Zahlen sind sowohl ganze positive als auch ganze negative Zahlen mit der Null

- Rationale Zahlen

  $\mathbb{Q} = \{\dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{3}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots\}$ → Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen; ganze Zahlen lassen sich auch als Bruch darstellen

- Reelle Zahlen

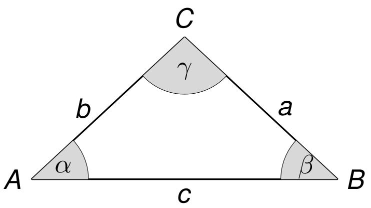
  $\mathbb{R} = \{\dots, \pi, \dots, \sqrt{2}, \dots\}$ → Reelle Zahlen sind alle Zahlen

[1] Es kann auch sein, dass die 0 nicht enthalten ist. Das ist nicht einheitlich. Fragt euren Lehrer!

5.2 Satz des Pythagoras im gleichschenkligen und -seitigen Dreieck

Man kann sowohl gleichschenklige als auch gleichseitige Dreiecke durch die Ergänzung der Höhe in zwei deckungsgleiche, rechtwinklige Dreiecke verwandeln. Dazu betrachten wir das folgende, gleichschenklige Dreieck:

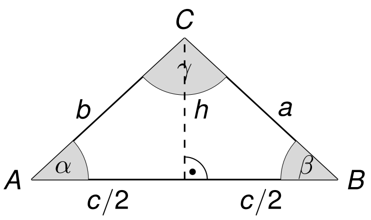
Beispiel



Die beiden sogenannten Schenkel a und b sind gleich lang. Außerdem sind die beiden Basiswinkel α und β gleich groß. Die Seite c ist die Basis.

gleichseitiges Dreieck

Wenn wir jetzt die Höhe der Seite c ergänzen, erhalten wir zwei deckungsgleiche Dreiecke, in welchen der Satz des Pythagoras wieder angewendet werden darf. Denkt außerdem daran, dass die Basis c durch die Ergänzung der Höhe in zwei gleich lange Abschnitte unterteilt wird. Außerdem wird der Winkel γ durch die Ergänzung der Höhe ebenfalls halbiert.



In diesem Dreieck gelten also nach dem Satz des Pythagoras die folgenden Zusammenhänge:

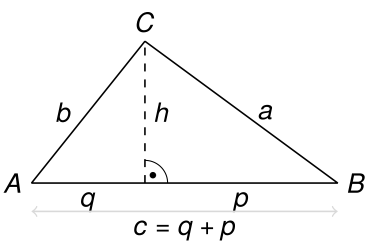
$$h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 \quad \text{und} \quad h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2$$

Die Anwendung im gleichseitigen Dreieck funktioniert nach dem gleichen Schema. Der einzige Unterschied ist lediglich die Tatsache, dass alle Seiten gleich lang und alle drei Winkel gleich groß sind (60°).

5.3 Höhen- und Kathetensatz

Der Höhen- und Kathetensatz sind weitere mathematische Methoden, welche euch behilflich sein können. Im Gegensatz zum Satz des Pythagoras können in einem beliebigen Dreieck durch Einführung einer Höhe h drei weitere interessante Größen ohne Umwege berechnet werden. Wir gucken uns das folgende Dreieck an:

Höhen- und Kathetensatz



Unser ursprüngliches Dreieck, ohne die Höhe, ist kein rechtwinkliges Dreieck. Jedoch erhalten wir, dadurch, dass wir die Höhe ergänzen, zwei rechtwinklige Dreiecke.

In einer solchen Konstruktion gelten die folgenden Formeln:

Höhensatz: $h^2 = q \cdot p$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

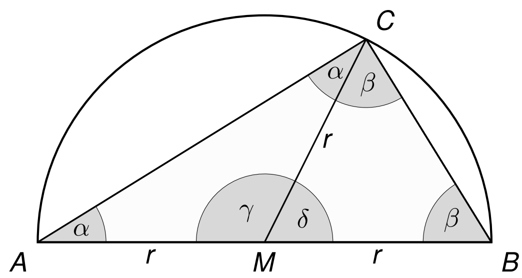
6 Trigonometrische Funktionen

Die Trigonometrie vereinfacht uns in vielerlei Hinsicht das Rechnen. Durch die Grundfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens haben wir die Möglichkeit, fehlende Winkel oder Seitenlängen zu berechnen. Selbst wenn wir kein rechtwinkliges Dreieck gegeben haben, was die Voraussetzung für diese Funktionen ist, können wir meist doch ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, um die Vorteile der Trigonometrie zu benutzen.

Die Trigonometrie findet nahezu überall Anwendung - ob in der Physik (z.B. wenn Kräfteverteilungen nach Richtungen aufgeteilt werden), in der Elektrotechnik (z.B. Feldrichtungen), im Maschinenbau oder Bauwesen. Die trigonometrischen Funktionen sind absolute Grundlagen in der Mathematik.

Was du bisher kannst und hier anwendest:

- Satz des Pythagoras
- Grundlagen bei Dreiecken



6.1 Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke

1. Fall:
Kathete und Hypotenuse geg.

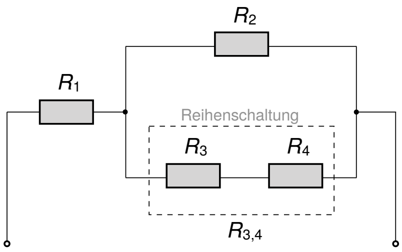
1. Zeichne die Hypotenuse c.
2. Zeichne nun den Thaleskreis um c.
3. Zeichne die gegebene Kathete ein.
4. Ergänze die fehlende Kathete.

2. Fall:
zwei Katheten (a und b) geg.

1. Zeichne die erste Kathete.
2. Zeichne die zweite Kathete ausgehend vom Punkt C im rechten Winkel ein.
3. Verbinde die Katheten nun mit der Hypotenuse c.

Wir schauen uns zum besseren Verständnis ein **Beispiel** an. Konstruiere das rechtwinklige Dreieck mit den gegebenen Werten $c = 7$ cm (Hypotenuse) und $a = 4$ cm (Kathete).

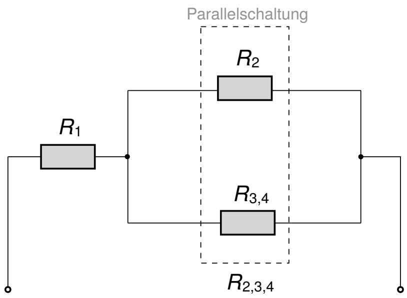
Da hier sowohl Reihen- als auch eine Parallelschaltung vorliegen, sollten wir schrittweise vorgehen, um den gesuchten Gesamtwiderstand zu bestimmen.



Schritt 1: Reihenschaltung bei R_3 und R_4

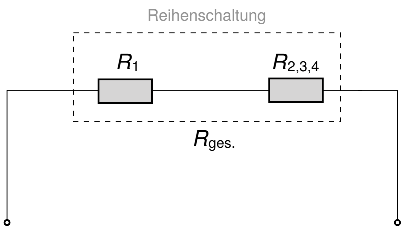
Wir erkennen die Reihenschaltung wie im Schaltbild dargestellt und fassen diese zu $R_{3,4}$ zusammen:

$$R_{3,4} = R_3 + R_4 = 10\ \Omega + 30\ \Omega = 40\ \Omega$$



Schritt 2: Parallelschaltung bei R_2 und $R_{3,4}$
Wir erkennen die Parallelschaltung wie im Schaltbild dargestellt und fassen diese zu $R_{2,3,4}$ zusammen:

$$R_{2,3,4} = \frac{R_{3,4} \cdot R_2}{R_{3,4} + R_2} = \frac{40\ \Omega \cdot 40\ \Omega}{40\ \Omega + 40\ \Omega} = 20\ \Omega$$



Schritt 3: Reihenschaltung bei R_1 und $R_{2,3,4}$
Wir erkennen die Reihenschaltung wie im Schaltbild dargestellt und fassen diese zu $R_{ges.}$ zusammen:

$$R_{ges.} = R_1 + R_{2,3,4} = 220\ \Omega + 20\ \Omega = 240\ \Omega$$

b) der Gesamtleitwert G

$$G = \frac{1}{R_{ges.}} = \frac{1}{240\ \Omega} = 0{,}00417\ \text{S}$$

c) der Gesamtstrom I

$$I = \frac{U}{R_{ges.}} = \frac{24\ \text{V}}{240\ \Omega} = 100\ \text{mA}$$

7.3 Aufgaben

A.7.1. Berechnen jeweils die fehlende Größe:

a) $U = 230\text{V}, I = 0{,}5\text{A}, R?$ b) $U?, I = 0{,}2\text{A}, R = 1000\Omega$ c) $U = 42\text{V}, I?, R = 200\Omega$

A.7.2. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Je größer die Spannung, umso größer die Stromstärke.

b) Je kleiner der Widerstand, umso kleiner die Stromstärke.

c) Soll die Stromstärke konstant bleiben, so muss bei einer Spannungserhöhung der Widerstand ebenfalls erhöht werden.

Feste und flüssige Stoffe

Stoff	Dichte in $\mathrm{kg/dm^3}$
Gold	19,3
Gusseisen	7,85
Aluminium	2,7
Wasser (bei $0\,^\circ\mathrm{C}$)	1,0
Kupfer	8,9
Stahl	7,85
Titan	4,5

Gase (bei $0\,^\circ\mathrm{C}$ und 1,013bar)

Stoff	Dichte in $\mathrm{kg/m^3}$
Luft	1,293
Sauerstoff	1,43
Wasserstoff	0,09

Beispiel Masse berechnen

Um Aufgaben zur Dichte lösen zu können, müssen wir häufig die Gleichung nach einer Größe, die unbekannt ist, auflösen. Schauen wir uns dazu ein **Beispiel** an.

Bestimme die Masse einer 100mm langen Stange aus quadratischem Aluminium mit 50mm Kantenlänge?

Zunächst müssen wir das Volumen der Stange bestimmen:

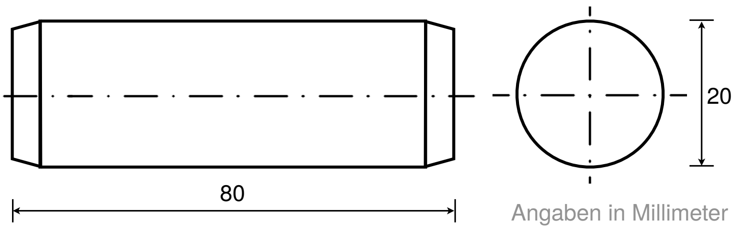
$$V = A \cdot h = (50\mathrm{mm})^2 \cdot 100\mathrm{mm} = 250.000\mathrm{mm}^3 = 0{,}25\mathrm{dm}^3$$

Anschließend schauen wir in unserem Tabellenbuch nach der zugehörigen Dichte des angegeben Materials (hier Aluminium, also $\rho = 2{,}7\mathrm{kg/dm^3}$) und setzen alles in die Formel ein:

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V = 2{,}7\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} \cdot 0{,}25\mathrm{dm}^3 = 0{,}675\mathrm{kg}$$

12.1 Aufgabe

A.12.1. Ein Zylinderstift mit gefasten Kanten wird bei lagesicheren Verbindungen (welche nie oder kaum gelöst werden) und zum Fixieren von Teilen verwendet.



In unserem Fall liege ein Zylinderstifte $\varnothing 20 \times 80$ aus Stahl vor.

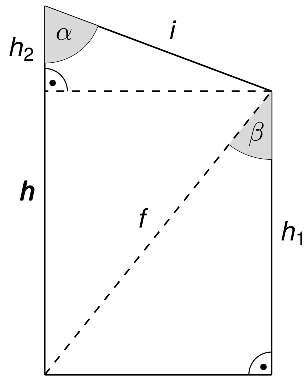
a) Bestimme das Volumen des Zylinderstifts.

b) Wie groß ist die Masse von 100 Zylinderstiften?

(Hinweis: Die Fasen können bei dieser Berechnung vernachlässigt werden.)

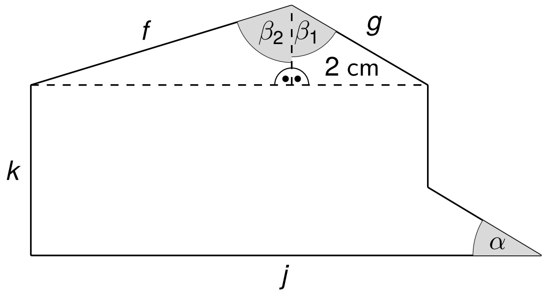
zu A.6.5. Zunächst machen wir uns eine Skizze und unterteilen die Figur sinnvoll in Teilfiguren.

Um die Höhe h zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Höhe h_1 (Ankathete beim Winkel β) und erhalten $\cos(\beta) = h_1/f \Rightarrow h_1 = 25 \cdot \cos(36{,}87°) \approx 20$ cm. Anschließend bestimmen wir die Ankathete h_2 beim Winkel α und erhalten $\cos(\alpha) = h_2/i \Rightarrow h_2 = 16{,}31 \cdot \cos(66{,}84°) \approx 6{,}41$ cm.



Die gesuchte Höhe beträgt:
$h = h_1 + h_2 = 20\text{ cm} + 6{,}41\text{ cm} = 26{,}41\text{ cm}$

zu A.6.6. Wir ergänzen unsere Figur um die gestrichelten Linien und teilen den Winkel β in β_1 und β_2 auf. Es gilt hierbei: $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

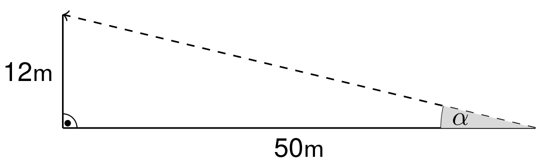


Zunächst bestimmen wir den Winkel β_1 über $\beta_1 = \sin^{-1}(2/2{,}24) \approx 63{,}23°$. Anschließend können wir die Höhe des Dreiecks berechnen: $h = 2{,}24 \cdot \cos(63{,}23°) \approx 1{,}01$ cm.

Der zweite Teilwinkel von β lautet $\beta_2 = \cos^{-1}(1{,}01/3{,}16) \approx 71{,}37°$. Dadurch ergibt sich für den gesamten Winkel $\beta = 63{,}23° + 71{,}37° = 135°$.

Der fehlende Winkel im oberen rechten rechtwinkligen Dreieck (mit Winkel β_1) ist der Winkel α (Stichwort: Stufenwinkel - oder berechnen über Innen-Winkelsumme). Dadurch ergibt sich die letzte gesuchte Größe: $\tan(\alpha) = 1{,}01/2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1{,}01/2) \approx 26{,}8°$.

zu A.6.7. Wir machen uns zunächst eine Skizze und bestimmen anschließend den gesuchten Winkel.



Uwe schwimmt in einem Winkel von

$$\tan(\alpha) = \frac{12}{50} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{12}{15}\right) \approx 13{,}5°.$$