Inhalt

Vorwort

Dieses 146 Seiten starke Lernheft führt dich durch die relevanten Inhalte der Veranstaltung *Analysis 1* für Lehramt. Dabei steht primär die Vermittlung der Inhalte im Vordergrund und nicht die 100%ige mathematische Korrektheit in all ihren Facetten. Gerade diese ausführlichen, mathematischen, in manchen Augen nahezu kryptischen Notationen – wie sie standardmäßig in allen Universitäts-Skripten und Büchern zu finden sind – sind sehr vielen Studierenden beim Begreifen der Inhalte ein Dorn im Auge. Keineswegs wollen wir die Wichtigkeit solcher Notationen herunterspielen. Im Gegenteil! Die Mathematik als solches lebt von dieser Präzision in ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen. Für Neulinge in der Welt der „Universitäts-Mathematik“ kann jedoch genau das dazu führen, Mathematik schnell als Qual abzustempeln, anstatt sie mit Faszination zu entdecken. Wenngleich das folgende Zitat des berühmten Mathematikers Georg Cantor in vielerlei Hinsicht Interpretationsspielraum bietet, nutzen wir es für dieses Lernheft:

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit!

Dieses Lernheft stellt somit eher einen alternativen Zugang zu den Themen dar. Wir sind der Meinung, dass auf dem Verständnis der grundsätzlichen, inhaltlichen Zusammenhänge der Themengebiete aufgebaut werden kann, um den Sinn hinter allen mathematischen Notationen zu begreifen. In Vorlesungen wird üblicherweise der genau gegenteilige Weg eingeschlagen. Man könnte sagen, dieses Lernheft stellt die berühmte *andere Seite der Medaille* dar.

Zusätzlich zu den abgedruckten Erläuterungen und Beispielen findest du an den Seitenrändern insgesamt 146 QR-Codes zu Daniel Jungs Mathe Erklärvideos; direkt auf die jeweiligen Themen abgestimmt. Damit erhältst du zusätzliche Erklärungen, die du in deinem eigenen Tempo so oft ansehen kannst, wie du willst.

Am Ende jedes Kapitels sind Übungsaufgaben zu finden (insgesamt 68 Aufgaben), mit denen du die erlernten Inhalte festigen kannst. Dabei sind folgende Schwierigkeitsstufen zu finden:

Level: Absolute Basisübungen mit (sehr) niedrigem Schwierigkeitslevel. Die Aufgaben sind als Einstieg in das jeweilige Thema gedacht. Du solltest keine Probleme haben, diese Einsteigeraufgaben zu lösen. **Insgesamt 15 Aufgaben.**

Level: Übungen, welche mit Hilfe der jeweiligen Standardtechniken zu den Themen gelöst werden können. Die Aufgaben auf diesem Level solltest du ohne große Probleme lösen können, bevor du dich einer Prüfung stellst. **Insgesamt 47 Aufgaben.**

Level: Übungen, die zur Lösung themenübergreifendes Wissen verlangen, wie das Anwenden von allgemeinen Formeln oder (abstrakten) Zusammenhängen. Wenn du hier alle Aufgaben lösen kannst, bist du gut gewappnet für die Prüfung. **Insgesamt 6 Aufgaben.**

Diese Einteilung der Schwierigkeiten ist natürlich rein subjektiv und kann sich in jeder Bildungseinrichtung unterscheiden. Sie dient lediglich einer groben Einschätzung. Die Lösungen zu den Aufgaben findest du auf unserer Webseite, die über den jeweils angegebenen QR-Code zu erreichen ist.

Feedback

Sollte sich doch mal ein Fehler eingeschlichen haben, würden wir von dir sehr gerne darauf hingewiesen werden, falls du in diesem Heft welche entdeckst. Ebenso freuen wir uns natürlich über allgemeines Feedback, Lob und Kritik an dem Lernheft. In diesem Sinne wünschen wir dir viel Erfolg im (weiteren) Studienverlauf und ganz besonders eine Top-Abschlussnote in der *Analysis 1* Veranstaltung.

— Dr. Andreas Stahl

Daraus erkennen wir folgende **Gesetzmäßigkeiten**:

1. Die Negation entspricht der Verneinung, sodass der Wahrheitsgehalt der ursprünglichen Aussage gewechselt wird.
2. Eine Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
3. Eine Disjunktion ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.
4. Bei einer Implikation erkennen wir, dass nur aus einer wahren Aussage keine falsche Aussage folgen kann. Insbesondere kann aus einer falschen Aussage sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgen.
5. Eine Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn die Wahrheitsgehalte der Aussagen identisch sind.
6. Eine Kontravalenz ist nur dann wahr, wenn die Wahrheitsgehalte der Aussagen verschieden sind.

Elementares Beispiel

Komplexes Beispiel (1)

Komplexes Beispiel (2)

Möchten wir nun eine Gleichheit von Aussagen beweisen, so stellen wir in diesem Fall eine Wahrheitstabelle auf und zeigen, dass beide Aussagen den gleichen Wahrheitsgehalt besitzen. Eine Gleichheit von Aussagen entspricht also gleichen Wahrheitsgehalten und somit können wir ebenfalls sagen, dass die Aussagen äquivalent sind.

Beispiel - Wahrheitstafel: Betrachten wir folgende Behauptungen

$$1)\ \Big(A \to B\Big) = \Big((\neg B) \to (\neg A)\Big) \quad \text{und} \quad 2)\ \Big(\Big((A \to B) \wedge (\neg B)\Big) \to (\neg A)\Big) = \Big(C \vee (\neg C)\Big)$$

Fertigen wir für die erste Gleichung eine Wahrheitstabelle an. Dabei gehen wir sukzessive vor und nähern uns schrittweise der ganzen Aussage:

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \to (\neg A)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Wir erkennen, dass die Wahrheitsgehalte für $A \to B$ mit den Wahrheitsgehalten von $(\neg B) \to (\neg A)$ übereinstimmen, sodass die Aussagen äquivalent beziehungsweise gleich sind. Das Prinzip, welches durch die erste Gleichheit beschrieben wird, heißt „Prinzip der Kontraposition“ und wird später genauer betrachtet.

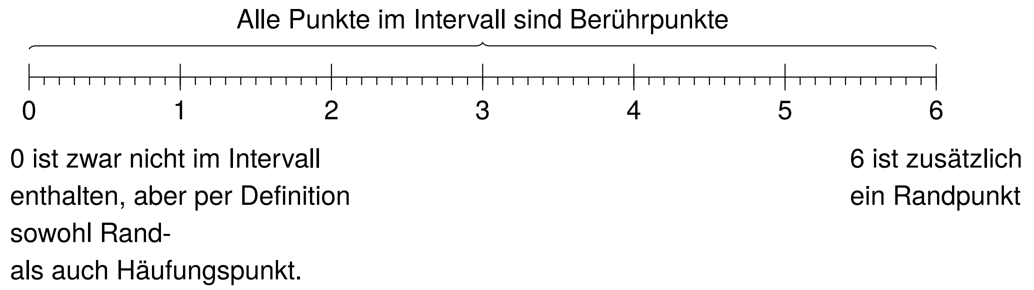
Für den zweiten Fall benötigen wir mehr Fälle, da wir insgesamt drei statt zwei Aussagen betrachten. Hier gibt es eine Merkhilfe, um alle möglichen Kombinationen von Fällen zu erhalten:

> Im Falle von n Aussagen beginnen wir mit zwei großen Blöcken w und f der Länge 2^{n-1} bei der ersten Aussage und unterteilen jeden Block für die nächste Aufgabe wiederum in zwei gleichgroße Blöcke w und f und wiederholen dies bis zur letzten Aussage.

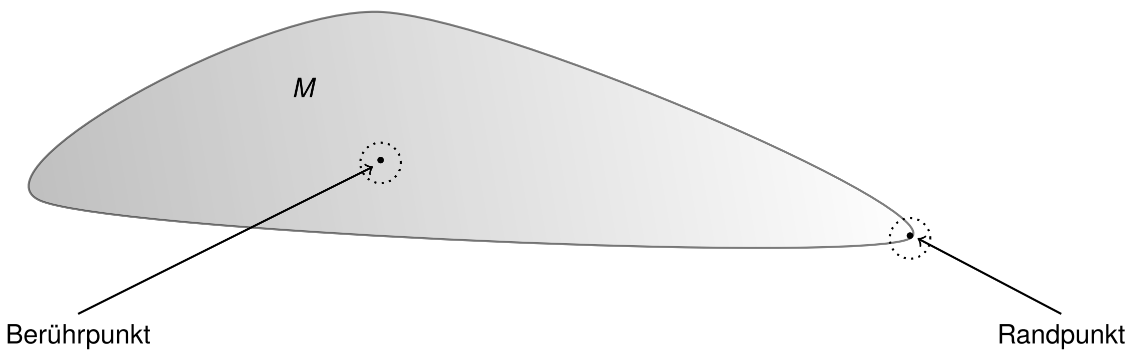
2. Jeder Randpunkt ist automatisch ein Berührpunkt, aber nicht umgekehrt.

Obige Definitionen veranschaulichen wir mit folgendem Schaubild, wobei die gestrichelten Linien eine ε-Umgebung darstellen:

Für $\mathbb{R}$ und $M =]0, 6]$:



Zusätzlich zeigen wir zur weiteren Anschauung ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$, wobei die genauen Berechnungen dazu erst in Analysis 2 betrachtet werden:



Damit können wir nun neben den offenen Mengen eine weitere Klasse definieren:

> Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wir bezeichnen M als **abgeschlossene** Menge oder sagen auch M ist **abgeschlossen**, wenn
>
> $$\overline{M} = M$$
>
> gilt und jeder Berührpunkt von M ist (die andere Richtung: Jeder Berührpunkt ist Element von M – gilt per Definition).

Beispiel - Abgeschlossene Mengen: Wie bereits im Abschnitt zu offenen Mengen erläutert, stellen wir zunächst fest, dass die leere Menge diese Eigenschaft erfüllt, da es kein Element gibt, das es nicht erfüllt. Die leere Menge ist daher sowohl offen als auch abgeschlossen.

Betrachten wir als Nächstes diese beiden Mengen:

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$
$$G_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$$

Um zu entscheiden, ob es sich beiden obigen Mengen um abgeschlossene Mengen handelt, müssen wir beweisen, dass alle Berührpunkte in der Menge liegen:

2.1.2 Konvergenz von Folgen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der sogenannten Konvergenz von Folgen. Diese führen wir zunächst per Definition ein und erläutern sie anschließend mit Hilfe eines Schaubilds, da die Konvergenz zum einen einer beziehungsweise der Schlüsselbegriff der Analysis 1 darstellt und zum anderen mit der eigentlich Definition Verständnisprobleme einhergehen:

Konvergenz & Divergenz

Beispiel Konvergenz

Beispiel Nullfolgen

Beispiel alternierende Folge

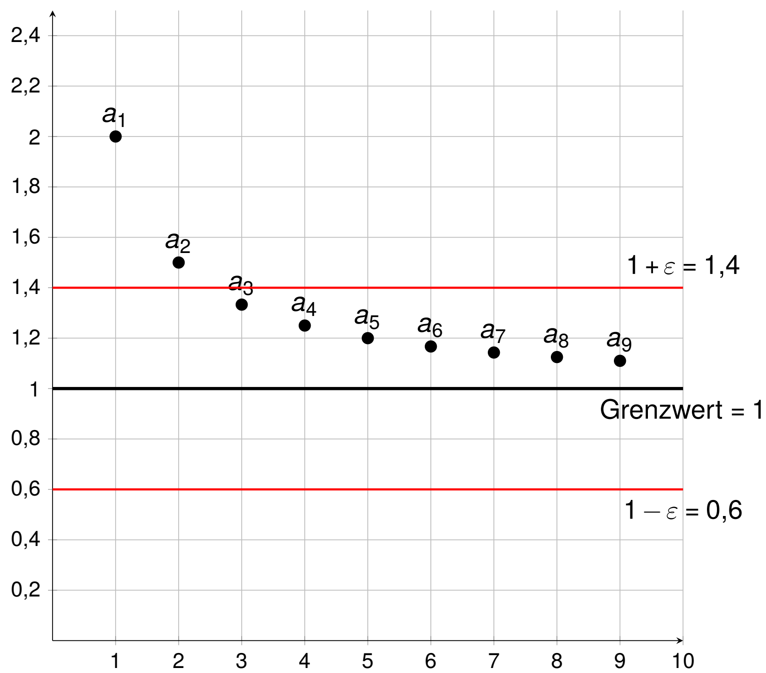
> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir sprechen bei a vom **Grenzwert** der Folge (a_n), falls die folgende Definition erfüllt ist:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ : \ \ |a_n - a| \ \leq \ \varepsilon$$
>
> In diesem Fall schreiben wir auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Die Definition lässt sich wie folgt verstehen:

- Wir geben ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vor.
- Zu diesem ε finden wir einen Index n_0. (Da dieser theoretisch von ε abhängt, wäre $n_0(\varepsilon)$ treffender.)
- Nun gilt für **alle** n, die **größer** als der gefundene Index n_0 sind, dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt.
- $|a_n - a| \leq \varepsilon$ bedeutet, dass der Abstand der Folgeglieder (also aller Folgeglieder mit Index $n \geq n_0$) zum Grenzwert a kleiner ist, als der beliebig kleine Wert ε, den wir uns vorgegeben haben. Durch den Betrag erhalten wir die Bedingung
$$a - \varepsilon \ \leq \ a_n \ \leq \ a + \varepsilon,$$
sodass wir eine Art „Schlauch" um den Grenzwert bilden können, in welchem alle Folgeglieder **nach** einem gewissen n_0 liegen müssen.

Wir ergänzen die Definition zur Veranschaulichung mit folgenden Grafiken:

Nehmen wir als erstes **Beispiel** die Folge $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ mit $a = 1$ und $\varepsilon = 0{,}4$:



3 Reihen und die eulersche Zahl

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit speziellen Folgen, die über Summieren anderer Folgen entstehen. Dazu betrachten wir zunächst diverse endliche Summen und deren Berechnungsmethoden, bevor wir uns dem Grenzwertübergang widmen und die sogenannten Reihen studieren.

3.1 Endliche Summen

3.1.1 Der kleine Gauß

Summen-
formeln

Wir starten mit der ersten Regel zur Berechnung von Summen. Diese trägt basierend auf einer Anekdote des Mathematikers *Carl Friedrich Gauß* den Namen „**der kleine Gauß**". Die eigentliche Aufgabenstellung hierzu war die Berechnung der ersten 100 natürlichen Zahlen, also:

$$1+2+3+...+100 = ?$$

Wir duplizieren diese Summe und schreiben sie in verkehrter Reihenfolge in eine zweite Zeile, also genau so:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 2 & + & 1 & + & 0 \end{array}$$

Wir erkennen, dass die Summe in jeder Spalte stets den Wert 100 ergibt. Die Anzahl der Spalten beträgt in diesem Beispiel 101 (da wir die 0 mitzählen müssen). Dementsprechend erhalten wir als Wert der doppelten Summe $101 \cdot 100$. Es gilt:

$$1+2+3+...+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5.050$$

Im Kapitel der vollständigen Induktion haben wir diesen Sachverhalt bereits eine beliebige Anzahl von Summanden bewiesen:

> **Die Regel des kleinen Gauß**
> Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt
> $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Mit Hilfe der oben aufgeführten Regel wollen wir nun folgenden Term berechnen:

$$\sum_{k=1}^{50} (3k-2)$$

Mit Hilfe der Linearität des Summation erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{50} (3k-2) = \sum_{k=1}^{50} 3k - \sum_{k=1}^{50} 2 = 3\sum_{k=1}^{50} k - 2\sum_{k=1}^{50} 1 = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 2 \cdot 50 = 3.825 - 100 = 3.725$$

4.2.1 Zwischenwertsatz

Betrachten wir die naive (und wie wir aus den letzten Abschnitten nun wissen, mathematisch nicht korrekte) Aussage, dass eine Funktion stetig ist, wenn wir sie durchzeichnen können, ist folgender Satz intuitiv sofort klar:

Zwischen-wertsatz

> **Der Zwischenwertsatz**
> Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so existiert für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ beziehungsweise $f(b) \leq y \leq f(a)$ ein $x \in [a,b]$, sodass $f(x) = y$.
>
> Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

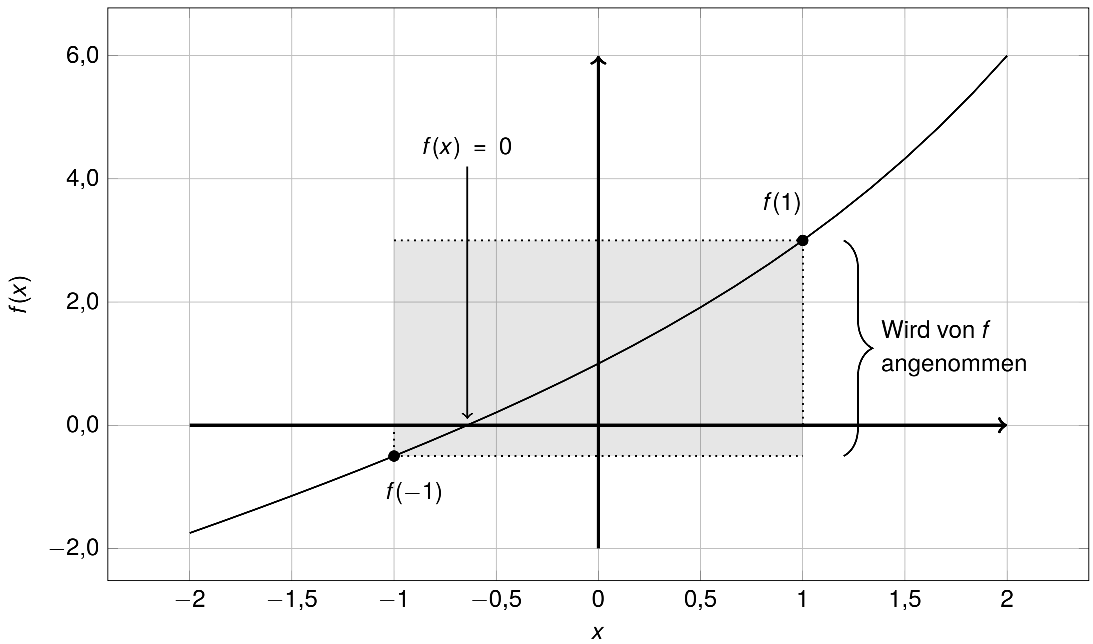
Der Zwischenwertsatz liefert uns eine zusätzliche Aussage über Nullstellen:

> Gilt für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dass $f(a)$ und $f(b)$ über verschiedene Vorzeichen verfügen, so besitzt f im Intervall $[a, b]$ eine Nullstelle.

Beispiel - Zwischenwertsatz: Betrachten wir als Beispiel die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x + x$. Algebraisch können wir für diese Funktion keine Nullstellen berechnen. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes können wir jedoch zeigen, dass f auf dem Intervall $[-1, 1]$ eine Nullstelle besitzt. Es gilt

$$f(-1) = 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 2^1 + 1 = 3 > 0,$$

sodass nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [-1, 1$ existieren muss, sodass $f(x) = 0$ gilt. Diese Aussage halten wir visuell in folgendem Schaubild fest:



Da wir mit den Folgen, die beide gegen 0 konvergieren, zwei verschiedene Grenzwerte über die h-Methode erhalten, ist die Betragsfunktion in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Zusammenhang zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen ab. Die Bedingung, dass f differenzierbar ist, ist nämlich stärker als die Bedingung, dass f stetig ist, denn es gilt:

Differenzierbar & Stetigkeit

$$\boxed{f \textbf{ differenzierbar} \Rightarrow f \textbf{ stetig}}$$

5.1.2 Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit diversen Ableitungsregeln, die für zusammengesetzte Funktionen gelten. In folgender Tabelle halten wir mehrere Ableitungsregeln fest:

Übersicht

Regel	**Ausgangsform**	**Ableitung**
Faktorregel	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Summenregel	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
Produktregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x)+g'(x) \cdot f(x)$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)-f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Produktregel

Kettenregel

Quotientenregel

Wir werden eine der obigen Regeln beweisen, da die anderen Regeln analog bewiesen werden können. Dabei nehmen wir uns die Produktregel vor. Seien also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Wir zeigen, dass

$$h(x) = (f \cdot g)'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) + g'(x)$$

gilt. Dazu betrachten wir die h-Methode und fügen an einer Stelle eine 0 hinzu, sodass wir geschickt ausklammern können. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{h(x_0+h)-h(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)\overbrace{-f(x_0+h)\cdot g(x_0)+f(x_0+h)\cdot g(x_0)}^{=0}-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot(g(x_0+h)-g(x_0))+(f(x_0+h)-f(x_0))\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot(g(x_0+h)-g(x_0))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h)-f(x_0))\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

6.2 Taylorreihen

Das Kapitel der Potenzreihen möchten wir mit einer speziellen Klasse von Potenzreihen abschließen. Diese sind dafür geeignet, ausgehend von Funktionen eine Potenzreihe zu „entwickeln“. Auf der einen Seite können wir somit an eine Potenzreihe mit Konvergenzradius gelangen und zum anderen besteht die Möglichkeit der Approximation, in dem die „Entwicklung“ nicht bis zum Ende geführt wird. Es gilt:

Einführung

Taylorreihe e^x

Taylorreihe $\sin(x)$

> Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann definieren wir für $x_0 \in (a, b)$ die **Taylorreihe mit Entwicklungspunkt** x_0 durch
>
> $$T_{f(x,x_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$
>
> Hierbei bezeichnet $f^{(n)}(x_0)$ die n-te Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Die Existenz der Taylorreihe zu beliebigen Funktionen beliebig oft differenzierbaren f ist nicht garantiert. Auch der Konvergenzradius kann unendlich, endlich oder 0 betragen.

Es kann vorkommen, dass eine Taylorreihe, die aus einer Funktion f entwickelt wurde, zwar konvergiert, aber nicht gegen die Funktion f. Aber es gilt folgende Definition beziehungsweise Satz:

> Eine Funktion $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir für $x_0 \in D_f$ als **analytisch in** x_0, wenn eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass die Potenzreihe
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$
>
> in einer Umgebung von x_0 gegen die Funktion konvergiert.
>
> Für analytische Funktionen stimmt die Taylorreihe mit dieser Reihe stets überein.

Beispiel - Taylorreihe: Betrachten wir die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Um diese Funktion in eine Taylorreihe zu „entwickeln“, benötigen wir eine Formel für die n-te Ableitung, daher berechnen wir die ersten Ableitungen, sodass wir eine Vermutung treffen können:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \\
f''(x) &= -\frac{2}{(1+x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{6}{(1+x)^4} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{24}{(1+x)^5}
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass sich das Vorzeichen bei jeder Ableitung ändert und wir die ersten natürlichen Zahlen im Zähler aufmultiplizieren. Zusammen mit der steigenden Potenz im Nenner vermuten wir daher die Formel

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Diese Behauptung beweisen wir per vollständiger Induktion: