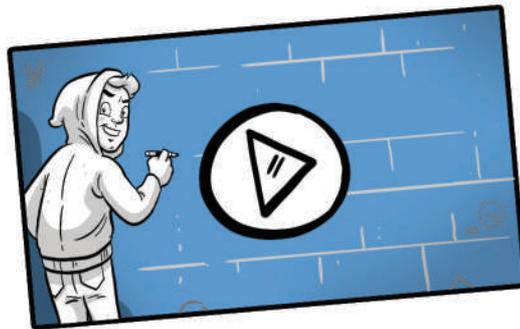


Wir helfen immer: In der Schule und zu Hause

Unsere Lernhefte können sehr flexibel eingesetzt werden:
ob als Arbeitsbuch im Unterricht, ob zum selbstständigen Erarbeiten nach dem „Flipped Education“- Konzept oder zum Wiederholen und Festigen von Inhalten und zur Vorbereitung auf Prüfungen des jeweiligen Schulabschlusses – unsere Lernhefte sind **multifunktional**.

Digitale Lernvideos:

Unser **Online-Lerncoach** Katharina erklärt euch leicht verständlich anhand der Beispiele im Lernheft das jeweilige Thema. Anschließend wird dieses Vorwissen mithilfe von passenden Aufgaben nochmals vertieft. Die Lernvideos sind für dich jederzeit digital verfügbar, du kannst also in Zukunft **immer und überall lernen**.



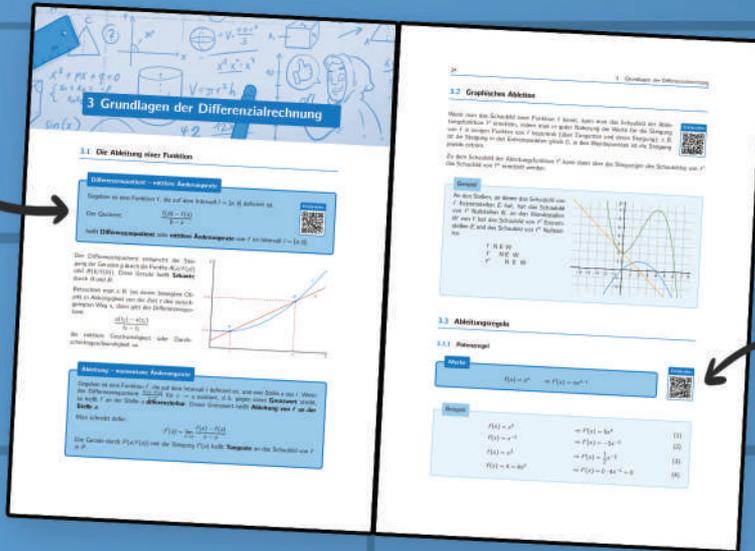
Messbarer Lernerfolg durch Lernkontrolle via App:

Unsere **App Skills4School**, bekannt aus der Sendung „Die Höhle der Löwen“, ermöglicht es dir, deine Fortschritte im Lernprozess jederzeit und überall via Smartphone zu kontrollieren und zu steuern. Schau, wo du dich noch verbessern musst, oder stelle fest, dass du alles kannst!



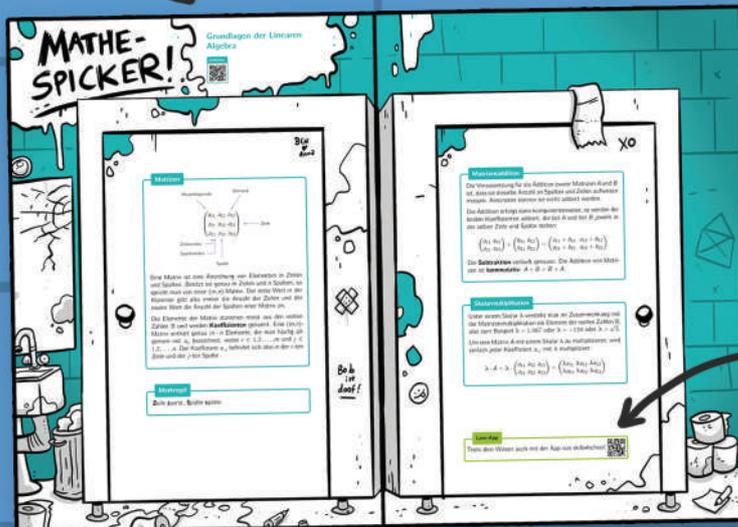
So lernst du mit unseren Lernheften:

Voraussetzungen werden geklärt.



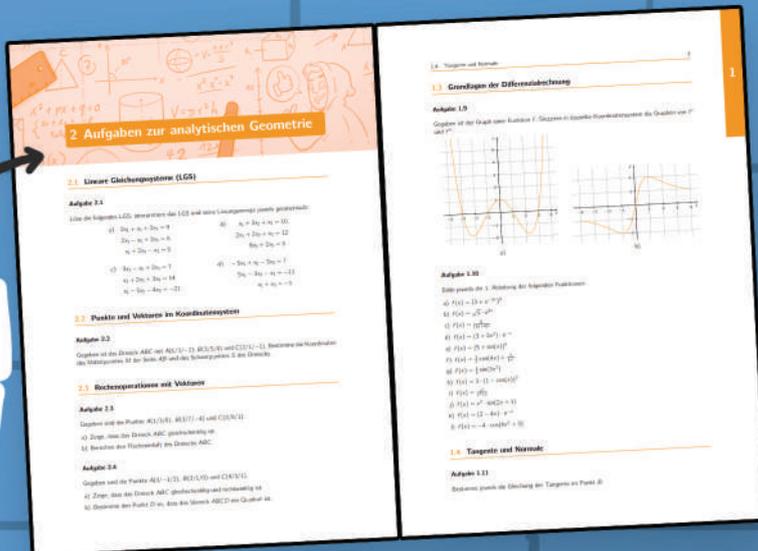
Hier findet man die **Anwendungsbeispiele** mit entsprechendem **Lernvideo** als QR Code. Einfach mit dem Smartphone abfotografieren und sich die Aufgabe auf dem Handy erklären lassen.

Der Mathespicker fasst nochmals alle wichtigen Inhalte des Kapitels zusammen. Hier findest du auch ein **Zusammenfassendes Spickzettel-Video**.



Skills4school Schnittstelle: Über diesen QR Code besteht die Möglichkeit in der **App skills4school** dein Gelerntes nochmals zu festigen und deinen Lernfortschritt jederzeit zu kontrollieren.

Mit dem **Kurztest** wird auf Leistungsüberprüfungen vorbereitet und die Lösungsschritte werden ausführlich erklärt.





Inhaltsverzeichnis

1	Gleichungen	1
1.1	Grundlagen zur Lösung von Gleichungen	1
1.2	Kurztest	4
2	Funktionen	7
2.1	Ganz-rationale Funktionen	7
2.2	Gebrochen-rationale Funktionen	8
2.3	Exponential- und Logarithmus-Funktion	11
2.4	Trigonometrische Funktionen	13
2.5	Veränderungen von Funktionen	15
2.6	Umkehrfunktion	16
2.7	Verkettung von Funktionen	17
2.8	Kurvenscharen, Ortskurven	17
2.9	Kurztest	19
3	Grundlagen der Differenzialrechnung	23
3.1	Die Ableitung einer Funktion	23
3.2	Graphisches Ableiten	24
3.3	Ableitungsregeln	24
3.4	Kurztest	27
4	Tangente und Normale	31
4.1	Geraden in einer Ebene	31
4.2	Die Tangente in einem Punkt	31
4.3	Die Tangenten von einem Punkt	32
4.4	Die Normale in einem Punkt	33
4.5	Kurztest	34

5	Kurvenuntersuchungen	39
5.1	Definitions- und Wertebereich	39
5.2	Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$	40
5.3	Symmetrie	41
5.4	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	42
5.5	Extrempunkte	44
5.6	Wendepunkte	46
5.7	Monotonie, Krümmungsverhalten	47
5.8	Kurztest	49
6	Steckbriefaufgaben	57
6.1	Kurztest	60
7	Extremwertaufgaben	63
7.1	Kurztest	67
8	Integralrechnung	69
8.1	Die Stammfunktion	69
8.2	Die Flächeninhaltsfunktion	70
8.3	Das Integral	70
8.4	Eigenschaften des Integrals	70
8.5	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	71
8.6	Flächenberechnungen	72
8.7	Rauminhalt von Rotationskörpern	75
8.8	Uneigentliche Integrale	75
8.9	Mittelwerte von Funktionen	77
8.10	Produktintegration und Integration durch Substitution	77
8.11	Kurztest	79
9	Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung	85
9.1	Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen	85
9.2	Näherungsverfahren zur Berechnung von Integralen	86
9.3	Anwendungen des Integrals	87
9.4	Kurztest	88

10	Wachstums- und Zerfallsprozesse	93
10.1	Grundlagen	93
10.2	Lineares Wachstum	93
10.3	Exponentielles Wachstum	94
10.4	Beschränktes Wachstum	95
10.5	Logistisches Wachstum	96
10.6	Kurztest	97
11	Spezielle Themen zur Analysis	103
11.1	Trassierung	103
11.2	Symmetrie von Funktionen (allgemein)	105
11.3	Polynomdivision	105
11.4	Kurztest	107

1 Gleichungen

1.1 Grundlagen zur Lösung von Gleichungen

Gleichungen können eine Lösung, mehrere Lösungen oder keine Lösung haben. Eine Zahl ist genau dann Lösung einer Gleichung, wenn sie beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt $u \cdot v$ hat genau dann den Wert 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Lösungsformeln für quadratische Gleichungen:

- **Die abc-Formel:** Für die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gilt:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Die pq-Formel:** Für die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gilt:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.1.1 Lineare Gleichungen

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x + 8 &= 0 && | -8 \\ 3x &= -8 && | :3 \\ x &= -\frac{8}{3} && \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ -\frac{8}{3} \right\} \end{aligned}$$

1.1.2 Quadratische Gleichungen (Gleichungen 2. Grades)

Beispiel

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 0 && \text{(ausklammern)} \\ x \cdot (x - 4) &= 0 \\ x_1 = 0; \quad x - 4 = 0 &\Rightarrow x_2 = 4 && \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 4\} \end{aligned}$$

Erklärvideo



Beispiel

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

(pq-Formel)

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{9}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm 3$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-5; 1\}$$

Erklärvideo



Beispiel

$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$

(abc-Formel) oder | : 2

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

(pq-Formel)

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = \frac{8}{2} = 4; \quad x_2 = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1; 4\}$$

1.1.3 Gleichungen 3. Grades

Beispiel

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

(ausklammern)

$$x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{1}$$

$$x_{1/2} = +3 \pm 1$$

$$x_2 = 4; \quad x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0; 2; 4\}$$

Erklärvideo



1.1.4 Gleichungen 4. Grades

Beispiel

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x^2 &= 0 && \text{(ausklammern)} \\
 x^2 \cdot (x^2 + 3) &= 0 \\
 x_{1/2} = 0; \quad x^2 + 3 = 0 &\Rightarrow x^2 = -3 && \text{(keine weitere Lösung)} \\
 \mathbb{L} &= \{0\}
 \end{aligned}$$



Beispiel

$$\begin{aligned}
 x^4 - 6x^2 + 8 &= 0 && \text{(Substitution: } x^2 = u) \\
 \Rightarrow u^2 - 6u + 8 &= 0 && \text{(pq-Formel)} \\
 u_{1/2} &= +3 \pm \sqrt{9 - 8} \\
 u_{1/2} &= +3 \pm \sqrt{1} \\
 u_{1/2} &= +3 \pm 1 \\
 u_1 = 4; \quad u_2 &= 2 \\
 \text{Resubstitution: } x^2 = 4 \quad x^2 &= 2 \\
 x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = \sqrt{2}; \quad x_4 &= -\sqrt{2} \\
 \Rightarrow \mathbb{L} &= \{2; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$



1.1.5 Exponentialgleichungen

Beispiel

$$\begin{aligned}
 e^{2x} - 5e^x &= 0 && | e^x \text{ ausklammern} \\
 e^x(e^x - 5) &= 0 \\
 e^x \neq 0; \quad e^x - 5 &= 0 \\
 e^x = 5 &\Rightarrow x = \ln(5) \\
 \mathbb{L} &= \{\ln(5)\}
 \end{aligned}$$



Beispiel

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \quad (\text{Substitution } e^x = u)$$

$$\Rightarrow u^2 - 2u - 3 = 0 \quad (pq\text{-Formel})$$

$$u_{1/2} = +1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$u_{1/2} = +1 \pm \sqrt{4}$$

$$u_{1/2} = +1 \pm 2$$

$$u_1 = 3; \quad u_2 = -1$$

$$\text{Resubstitution: } e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$$

$$e^x = -1 \text{ keine weitere Lösung}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ln(3)\}$$

1.1.6 Trigonometrische Gleichungen

Beispiel

$$\sin(x) \cdot \cos(x) - \cos(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\pi \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin(x) - 1 = 0 \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right\}$$

Erklärvideo



1.2 Kurztest

Aufgabe 1.1

Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$

b) $x^5 - 2x^3 - 3x = 0$

c) $e^{6x} - e^{3x} - 20 = 0$

d) $(\sqrt{x} - 3) \cdot (x - \frac{6}{x} - 5) = 0$

e) $e^x \cdot \ln(2x) - 3e^x = 0$

f) $\sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) = 0$ für $-\pi \leq x \leq \pi$

Hier geht's zu den Lösungen:

Lösungen



MATHE-SPICKER!

Gleichungen

Erklärvideo



BEN
♥
Anna

Grundlagen zur Lösung von Gleichungen

Gleichungen können genau eine Lösung, mehrere Lösungen oder keine Lösung haben.

Eine Zahl ist genau dann Lösung einer Gleichung, wenn sie beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt $u \cdot v$ hat genau dann den Wert 0, wenn einer der Faktoren u oder v 0 ist.

Die abc -Formel

Für die Lösungen einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ gilt:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die pq -Formel

Für die Lösungen einer Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ gilt:

$$x_{1/2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lern-App

Teste dein Wissen auch mit der App von skills4school:



Bob
ist
doof!