

Introduction

L'application de la théorie de la commande optimale sur des exemples concrets est souvent considérée comme difficile car elle demande un investissement important pour maîtriser ses subtilités. Dans la littérature, il existe de nombreux ouvrages exposant la théorie de la commande optimale (par exemple [LEE 67] ou [VIN 00]), illustrée sur des exemples (par exemple [BRY 75] ou [TRÉ 05]), ou des ouvrages dédiés à des familles de problèmes appliqués (par exemple [LIM 13]). L'objectif du présent ouvrage est d'apporter un éclairage pédagogique sur les fondements de la théorie, un peu dans l'esprit de Liberzon (voir [LIB 12]), et d'accompagner le lecteur sur l'application de la théorie, tout d'abord sur des exemples académiques (problèmes de la balançoire, du chauffeur pressé, etc.) puis, sur des exemples concrets en biotechnologie qui sont au cœur de l'ouvrage. Un effort particulier est porté sur les argumentations et interprétations géométriques des trajectoires fournies par l'application du principe du maximum de Pontryagin ou *PMP*.

Si cet ouvrage traite de contrôle optimal, ce n'est pas un livre à proprement parler sur le contrôle optimal. C'est avant tout une introduction – et une introduction seulement – au principe du maximum de Pontryagin. Il se trouve que le PMP est l'un des outils utilisés en théorie du contrôle optimal. Le contrôle optimal (ou *optimal control* en anglais) vise à déterminer un signal de commande (ou signal d'action) qui permet de minimiser (ou maximiser) un critère de performance de type intégral faisant intervenir l'état d'un système dynamique, éventuellement sous contraintes, et ce, sur un horizon de temps libre ou fixé. Dans de nombreuses situations, en appliquant le PMP, on peut pleinement caractériser les propriétés de ce contrôle, comprendre toutes les subtilités de sa « synthèse » et parfois même disposer de la valeur du contrôle à appliquer en tout temps en fonction de l'état du système.

À l'heure où la puissance d'un ordinateur basique permet d'envisager l'utilisation de techniques d'optimisation dites *directes*¹ d'un grand nombre de problèmes rencontrés en ingénierie, on peut légitimement s'interroger sur l'intérêt de recourir à une méthode permettant le calcul de solutions analytiques optimales. D'une part, ce serait oublier que le recours à une procédure d'optimisation numérique requiert de considérer des conditions initiales particulières du système dynamique considéré, ce qui limite la généralité du contrôle calculé. D'autre part, disposer du contrôle optimal nous permet de calculer la valeur minimale (ou maximale) du critère d'optimisation, ce que ne permet une approche numérique que sous certaines conditions bien particulières. Ce faisant, et indépendamment des contraintes pratiques qui peuvent amener l'utilisateur à appliquer un contrôle qui s'éloigne un tant soit peu du contrôle optimal théorique, on dispose d'un moyen de quantifier la distance entre les trajectoires optimales théoriques et celles réellement observées à partir de l'expérience sur le système réel.

Le contrôle des bioprocédés a connu ces dernières années des progrès fulgurants et ce, notamment, en raison de l'extraordinaire développement des capteurs. Jusqu'à récemment, seules des grandeurs physiques, telles la température, la pression ou encore des débits, pouvaient être mesurés avec précision. Aujourd'hui, il est possible de mesurer en ligne les variables du système que l'on pourrait qualifier de *fonctionnelles* comme les concentrations en substrats ou en bactéries du milieu réactionnel. De fait, de nombreux technologues affirmeront que le contrôle des systèmes biologiques – qui consiste souvent à maintenir constantes certaines de ces grandeurs – ne pose plus de problème majeur. C'est oublier un peu vite, à notre sens, que la théorie du contrôle ne s'intéresse pas seulement à stabiliser un système et à rejeter des perturbations mais également à calculer une ou plusieurs trajectoires de « consigne(s) ». Autrement dit, la question de savoir autour de quel état opérer un système a tout autant d'intérêt en termes d'optimalité que de le contrôler effectivement pour que les variables d'intérêt restent, autant qu'il est possible, proches de cette(ces) consigne(s)...

Comme le souligne le titre de sa première partie « Comment se servir du principe du maximum de Pontryagin ? », l'ouvrage propose une approche fondée sur l'apprentissage des procédures de résolution plutôt que sur l'exposé théorique des résultats fondamentaux, d'ordinaire assez difficiles d'accès dans les ouvrages de la littérature. Dans le chapitre 1, cet apprentissage reprend des concepts aussi élémentaires que ceux associés à la minimisation d'une fonction nous permettant, par extension, d'aborder la minimisation d'une fonctionnelle *via* le calcul des variations. Après en avoir présenté les limites, qui tiennent en particulier à la classe des fonctions à laquelle le contrôle doit appartenir, nous présentons dans le chapitre 2 la terminologie du contrôle optimal

1. On entend par là une approche purement numérique que l'on distingue des approches d'optimisation *indirectes* dans lesquelles on écrit d'abord des conditions d'optimalité que l'on résout analytiquement et/ou numériquement.

et le PMP. Le chapitre 3 présente plusieurs applications académiques et des problèmes mettant en évidence quelques subtilités du PMP notamment l'importance à accorder aux questions de régularité du contrôle.

Dans une seconde partie intitulée « Applications en génie des procédés », on se concentre dans trois chapitres distincts sur des problèmes touchant plus particulièrement le génie des procédés et les procédés biotechnologiques. Dans le chapitre 4, on détaille un problème de démarrage optimal d'un réacteur biologique. Nous verrons que pour maximiser les performances du bioréacteur (au sens où l'on souhaite minimiser le temps pour qu'une ressource – ici un polluant – atteigne un seuil donné), le contrôle dépend énormément du type de fonction de croissance considéré.

On s'intéresse ensuite dans le chapitre 5 à l'optimisation de la production de biogaz. Plus particulièrement, on propose – pour des conditions initiales particulières du système qui est en dimension 2 – une solution au problème de la maximisation de la production de biogaz sur un horizon de temps donné. On montre que les contraintes sur le contrôle (typiquement sur les bornes minimales et maximales admissibles) contraignent grandement la solution proposée.

Enfin, dans le chapitre 6, nous traitons de l'optimisation d'un système de filtration membranaire, de plus en plus utilisé en biotechnologie. La filtration membranaire consiste à maintenir une différence de pression, appelée *pression transmembranaire* (ou PTM) de part et d'autre d'une membrane plongée dans un fluide. La force créée induit la circulation du fluide du côté où la pression est plus forte vers celui dont la pression est moindre. Ce faisant, les éléments présents dans le fluide dont la taille excède la taille des pores de la membrane sont retenus par cette dernière, ce qui permet de séparer le fluide de ces éléments. Ainsi, au fil du temps, ces éléments vont colmater la membrane : il faudra alors soit augmenter la PTM pour maintenir un flux constant à travers la membrane, soit accepter de voir le flux décliner au cours du temps jusqu'au colmatage total des pores. Pour limiter ce phénomène, on procède régulièrement au *décolmatage* de la membrane, par exemple en appliquant un flux de *rétrolavage*. Si l'on définit comme la performance de la membrane la quantité de filtrat recueilli au cours du temps, on peut se demander quelle politique de rétrolavage serait la plus appropriée pour que la quantité filtrée sur un horizon de temps donné soit maximisée. En pratique, cela revient à déterminer à quels instants, et combien de temps, il faut appliquer le rétrolavage, en gardant en tête que lors du rétrolavage de l'eau claire est utilisée, eau dont le volume vient se soustraire au critère de performance. On se retrouve devant un compromis inévitable : il faut décolmater pour maintenir la membrane aussi propre que possible mais il faut le faire le moins souvent possible pour ne pas pénaliser les performances de filtration... Si l'on ne dispose pas de modèle de l'installation, il n'y a guère d'autre choix que de procéder par essais et erreurs : on se donne une grille d'instants de rétrolavage et de durées de ces rétrolavages et on procède à des expérimentations, tout en gardant en tête que l'état initial de la membrane peut avoir une influence importante. Si l'on parvient à obtenir un modèle de

la filtration membranaire, on peut se poser la question à l'aide des outils de la commande optimale. Il est important de noter ici que ce type de modèle est généralement non linéaire. Avec une approche directe, on peut tout à fait – en fonction de conditions initiales données – obtenir une séquence particulière de filtrations/rétrolavages à appliquer pour maximiser les performances du système. Mais comment savoir si l'algorithme que l'on utilise renvoie une solution globale ? Le modèle utilisé n'étant pas linéaire, il est en effet tout à fait possible qu'une autre politique permette d'obtenir des performances identiques, voire de meilleures. Nous verrons dans cet ouvrage que caractériser le contrôle optimal à l'aide du PMP nous permet de résoudre complètement le problème même si l'applicabilité de la solution optimale peut poser des problèmes pratiques qu'il nous faudra résoudre dans un second temps. En effet, alors que la solution réelle demande de calculer des instants auxquels il faut appliquer un rétrolavage, l'application du PMP demande de contraindre les contrôles à appartenir à des ensembles beaucoup plus larges pour en garantir l'existence. En réalité, ces contrôles vont prendre des valeurs qui n'ont pas de sens physique ! Mais ce n'est pas ce point qu'il faut retenir avant tout car, en pratique, plusieurs stratégies peuvent nous permettre d'en trouver des approximations comme par exemple celle proposée dans [KAL 17] : le résultat essentiel qu'il faut retenir ici est que les valeurs précises du contrôle à appliquer ne peuvent pas être trouvées autrement qu'en passant précisément par l'application du PMP !