ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 5

Διδιάστατα Προβλήματα

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

Η Μέθοδος *Galerkin-Ritz*

1.1 Οι Εξισώσεις *Galerkin-Ritz* και Ακρότατου

Εξίσωση 2ης Τάξης:	$Du - r = -\frac{d}{dx}(a\frac{du}{dx}) - r = 0 \quad 0 \le x \le L$ $ΓΟΣ \ u\big\|_{x=0} = \bar{u} \qquad ΔΟΣ \ a\frac{du}{dx}\Big\|_{x=0} = \bar{Q}$			
Πρόβλημα	u	a	r	$\bar{Q}$
1. Κάμψη συρματόσχοινου	Βέλος κάμψης w	S =Τάση συρματόσχοινου	Κάθετη φόρτιση f_z	Αξονική Δύναμη N
2. Αξονική Καταπόνηση Δοκού	Αξονική μετατόπιση u	EA E= Μέτρο ελαστικότητας A= Επιφάνεια διατομής	Αξονική φόρτιση f	Αξονική δύναμη N
3. Μετάδοση Θερμότητας	Θερμοκρασία T	Θερμική αγωγιμότητα k	Πηγή θερμότητας q	Παροχή θερμότητας Q

4. Ροή σε Σωλήνες	Υδροστατική πίεση p	$\pi D^4/128\mu$ D= Διάμετρος σωλήνα μ= Ιξώδες	Πηγή ροής q	Παροχή ρευστού Q
5. Στρωτή Ροή σε Κανάλι	Ταχύτητα $\vec{u}$	μ= *Ιξώδες*	Διαφορά πίεσης p	Αξονική τάση σ
6. Ηλεκτρικό Πεδίο	Ηλεκτρικό δυναμικό F	Διηλεκτρική σταθερά ε	Πυκνότητα φορτίου q	Ηλεκτρική Ροή D

Εξίσωση *Poisson*:

$$Du - r = -\nabla(a\nabla u) - r = 0$$

$$\Gamma O\Sigma \quad u\big|_{x=0} = \bar{u} \qquad \Delta O\Sigma \quad a\nabla u + c(u - u_\infty)\big|_{x=0} = \bar{Q}$$

Πρόβλημα	u	a	r	$\bar{Q}$
1. Ελαστική Μεμβράνη	Βέλος κάμψης w	S= Τάση μεμβράνης	Κάθετη φόρτιση f_z	Αξονική δύναμη N
2. Στρέψη διατομής	Συνάρτηση Δυναμικού F	$a=1/G$ G= Μέτρο διάτμησης	$r=2\theta$ θ= Στροφή/ Μονάδα μήκους	$\frac{\partial F}{\partial x} = -\tau_{zy}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = -\tau_{zx}$
3. Μετάδοση Θερμότητας	Θερμοκρασία T	Θερμική αγωγιμότητα k	Πηγή θερμότητας q	Παροχή θερμότητας από αγωγιμότητα $a\nabla u$ και μεταγωγή $c(u-u_\infty)$
4. Αστρόβιλη Ροή Ιδανικού Ρευστού	Συνάρτηση δυναμικού F	Πυκνότητα ρ	Πηγή δυναμικού q	$\frac{\partial F}{\partial x} = -\vec{v}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \vec{u}$
5. Ηλεκτρικό Πεδίο	Συνάρτηση δυναμικού F	Διηλεκτρική σταθερά ε	Πυκνότητα φορτίου q	Ηλεκτρική Ροή D
6. Μαγνητικό Πεδίο	Συνάρτηση δυναμικού F	Μαγνητική σταθερά μ	Πυκνότητα φορτίου q	Μαγνητική Ροή B

Οι εξισώσεις που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα έχουν την ίδια δομή, διότι όλες βασίζονται στην Θεωρία των Τετραέδρων, σύμφωνα με την οποία σε όλα τα φυσικά υποσυστήματα υπάρχουν οι μεταβλητές ισχύος F, V και οι μεταβλητές έργου V, S. Οι μεταβλητές ισχύος και έργου επιτρέπουν τις απαραίτητες *Ροή Ισχύος* και *Έργου*.

Για τα μηχανικά συστήματα οι συνήθεις άγνωστες μεταβλητές είναι οι γενικευμένες μετατοπίσεις S, ενώ για τα υπόλοιπα οι γενικευμένες δυνάμεις F, ή συναρτήσεις δυναμικού.

Οι εξισώσεις *Galerkin-Ritz* στα μηχανικά συστήματα ταυτίζονται με την αρχή των *Δυνατών Έργων*, λαμβάνοντας υπόψη πως οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις στο χώρο Ω εκφράζουν ισορροπία δυνάμεων:

$$\begin{gathered} Du - r = 0 \;\Leftrightarrow\; F_1 + F_2 + \ldots + F_K = 0 \\ \int_\Omega \delta u \cdot (Du - r) \cdot d\Omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_\Omega \delta S \cdot (F_1 + F_2 + \ldots + F) \cdot d\Omega = 0 \end{gathered} \tag{1-1}$$

Στα μη-μηχανικά συστήματα οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις στο χώρο Ω εκφράζουν συνήθως γενικευμένες ροές V. Οι εξισώσεις *Galerkin-Ritz* εκφράζουν συνήθως τη αρχή της *Δυνατής Ισχύος*:

$$\begin{gathered} Du - r = 0 \;\Leftrightarrow\; V_1 + V_2 + \ldots + V_K = 0 \\ \int_\Omega \delta u \cdot (Du - r) \cdot d\Omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_\Omega \delta F \cdot (V_1 + V_2 + \ldots + V_K) \cdot d\Omega = 0 \end{gathered} \tag{1-2}$$

Περαιτέρω, στην εξίσωση *Ritz* η οποία προκύπτει από την μερική ολοκλήρωση της εξίσωσης *Galerkin*, εμφανίζονται τετραγωνικοί όροι που αντιστοιχούν στα στοιχεία συσσώρευσης δυναμικής και κινητικής ενέργειας, και οι οποίοι μαθηματικά εκφράζουν *ολικά διαφορικά*, π.χ. $(\frac{1}{2} a u'^2), (\frac{1}{2} b u^2)$ [Σημ.: $(\;)' = {}^{\mathrm{d}}\!/_{\mathrm{dx}}$]:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta u \cdot (Du - r) \cdot d\Omega \xrightarrow{Du - r = (au')' + bu - r = 0} \\
&\int_{\Omega} \delta u \cdot [(au')' + bu - r] \cdot d\Omega = \\
&-\int_{\Omega} \delta u' \cdot au' \cdot d\Omega + -\int_{\Omega} \delta u \cdot bu \cdot d\Omega + -\int_{\Omega} \delta u \cdot r \cdot d\Omega + R = \\
&-\int_{\Omega} \delta(\frac{1}{2} au'^2) \cdot d\Omega + -\int_{\Omega} \delta(\frac{1}{2} bu^2) \cdot d\Omega + -\int_{\Omega} \delta u \cdot r \cdot d\Omega + R = 0
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

Οι εξισώσεις *Galerkin-Ritz* αντιστοιχούν συνεπώς σε *Συνθήκες Ακρότατου* για τα στοιχεία συσσώρευσης κινητικής και δυναμικής ενέργειας, καθώς και για τα στοιχεία διάχυσης ενέργειας και εξωτερικού έργου, εάν αυτά είναι συντηρητικά.

◢ 1.1.1 Δοκός σε Εφελκυσμό.

Η διαφορική εξίσωση:

$$(EA \cdot u')' + f_x = 0 \tag{1-4}$$

με τα όρια *x=0* και *x=L* και τις οριακές συνθήκες

$$u(0) = 0 \qquad EAu'(L) = 0 \tag{1-5}$$

μετατρέπεται στην ισοδύναμη εξίσωση *Galerkin*,

$$\int_{x=0}^{L} \delta u \cdot \{(EA \cdot u')' + f_x\} = 0 \tag{1-6}$$

και στη συνέχεια στην εξίσωση *Ritz*:

$$-\int_{x=0}^{L} \delta u' \cdot (EAu') \cdot dx + \int_{x=0}^{L} \delta u \cdot f_x \cdot dx + \underbrace{[\delta u \cdot (EAu')]_{x=0}^{x=L}}_{=0} = 0 \tag{1-7}$$

Ο $1^{ος}$ όρος της (1-7) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\int_{x=0}^{L} \delta u' \cdot (EAu') \cdot dx = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2} EA \cdot \delta(u')^2 \cdot dx = \delta\{ \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2} EA \cdot (u')^2 \cdot dx \} \tag{1-8}$$
$$= \delta I_p(u')$$

ενώ ο 2^{ος} όρος στη μορφή:

$$\int_{x=0}^{L} \delta u \cdot f_x \cdot dx = \delta\{ \int_{x=0}^{L} u \cdot f_x \cdot dx \} = \delta I_f(u) \tag{1-9}$$

και συνεπώς η εξίσωση *Ritz* γράφεται:

$$\delta[I_p(u') - I_f(u)] = 0 \tag{1-10}$$

Εάν οι δυνάμεις f_x είναι συντηρητικές, τότε η (1-10) αντιπροσωπεύει την συνθήκη ακρότατου της συνάρτησης $I_p(u') - I_f(u)$:

$$\delta[I_p(u') - I_f(u)] = 0 \iff I_p(u') - I_f(u) = Extremum \tag{1-11}$$

Επειδή η $I_p(u') - I_f(u)$ είναι μία συνάρτηση τετραγωνικής μορφής υπάρχει ένα μόνο ακρότατο, το οποίο συγχρόνως είναι και ελάχιστο.

Συνεπώς, η μέθοδος *Ritz* αντιστοιχεί στην παραπάνω περίπτωση στην ελαχιστοποίηση μίας τετραγωνικής συνάρτησης με ένα μόνο ελάχιστο, που οδηγεί σε μία και μονοσήμαντη λύση.

◢ 1.1.2 Δοκός σε Εφελκυσμό σε Ελαστική Έδραση.

Η διαφορική εξίσωση:

$$(EA \cdot u')' + k \cdot u + f_x = 0 \tag{1-12}$$

με τα όρια *x=0* και *x=L* και τις οριακές συνθήκες (1-5) μετατρέπεται στην εξίσωση *Ritz*:

$$-\int_{x=0}^{L} \delta u' \cdot (EAu') \cdot dx + \int_{x=0}^{L} \delta u \cdot ku \cdot dx + \int_{x=0}^{L} \delta u \cdot f_x \cdot dx = 0 \tag{1-13}$$

Ο 2^{ος} όρος της (1-13) μπορεί να γραφεί στη μορφή: