

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1 Δυναμικό Σύστημα με 1 Βαθμό Ελευθερίας

1.1	Εισαγωγή.....	1.1
1.2	Ελεύθερη Κίνηση.....	1.2
1.3	Εξαναγκασμένη Κίνηση - Τύποι Διεγέρσεων	1.5
1.4	Περιοδική Διέγερση	1.7
1.4.1	Μόνιμη Απόκριση	1.7
1.4.2	Συνάρτηση Μεταφοράς	1.9
1.5	Μεταβατική Διέγερση.....	1.12
1.5.1	Απόκριση του Δυναμικού Συστήματος - Φάση “A”.....	1.13
1.5.2	Απόκριση του Δυναμικού Συστήματος - Φάση “B”	1.14
1.5.3	Συνολική Απόκριση του Δυναμικού Συστήματος.....	1.15
1.6	Τυχαία Κίνηση	1.16

Κεφάλαιο 2 Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

2.1	Ιστορική Ανασκόπηση.....	2.1
2.2	Γενικευμένη Ισχύς και Έργο	2.3
2.3	Η Θεωρία των Τετραέδρων.....	2.6
2.4	Σύνδεση Τετραέδρων	2.9
2.4.1	Μετασχηματιστές (Ενισχυτές και Αναστροφείς)	2.9
2.4.2.	Επίδραση των Μετασχηματιστών στη Δυναμική Συστημάτων	2.11
2.5	Οι Γενικευμένες Εξισώσεις Newton	2.13
	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	2.14
2.5.1.	Ηλεκτρικό σύστημα με έναν βαθμό ελευθερίας.	2.14
2.5.2.	Ρευστομηχανικό σύστημα με έναν βαθμό ελευθερίας.....	2.15
2.5.3.	Μηχανικό σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας.	2.15
2.5.4.	Ρευστομηχανικό σύστημα με δύο αποταμιευτές.	2.16
2.5.5	Υδραυλικός Επενεργητής.....	2.18
2.5.6.	Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα.	2.19
2.6	Η Αρχή των Δυνατών Έργων (Η Αρχή της Δυνατής Ισχύος)	2.20
	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	2.20
2.6.1	Μηχανικό σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας.	2.20
2.6.2	Ρευστομηχανικό σύστημα με δύο αποταμιευτές.	2.21
2.6.3	Υδραυλικός Επενεργητής.....	2.22
2.6.4	Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα.	2.22
2.6.5	Μηχανικό Σύστημα με Ενδιάμεσο Ενισχυτή.....	2.23

2.6.6 Γερανός	2.24
2.6.7 Ηλεκτρο-Ρευστο-Μηχανικό Σύστημα.	2.25
2.7 Οι Εξισώσεις Lagrange.....	2.27
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	2.31
2.7.1 Υδραυλικός Επενεργητής.....	2.31
2.7.2 Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα.	2.31
2.7.3 Μηχανικό Σύστημα με Ενδιάμεσο Ενισχυτή.....	2.32
2.7.4 Γερανός.	2.33
2.7.5 Ηλεκτρο-Ρευστο-Μηχανικό Σύστημα.	2.34

Κεφάλαιο 3 Δυναμικά Σύστηματα 2 Βαθμών Ελευθερίας

3.1 Δυναμικό Σύστημα 2 Βαθμών Ελευθερίας	3.1
3.2 Ελεύθερη Κίνηση Χωρίς Απόσβεση.....	3.2
3.3 Ιδιότητες των Ιδιοανυσμάτων X_n	3.5
3.4 Περιοδική Διέγερση	3.8
3.4.1 Χωρίς Δυνάμεις Απόσβεσης	3.8
3.4.2 Μόνιμη Απόκριση με Δυνάμεις Απόσβεσης	3.10
3.4.4 Συνάρτηση Μεταφοράς $H_{ij}(\Omega)$	3.13
3.4.4 Χρησιμοποίηση Μηχαδικών Συναρτήσεων	3.13
3.5 Ιδιοανυσματική Ανάλυση.....	3.15
3.6 Κίνηση με Απόσβεση.....	3.17
3.6.1 Ελεύθερη Κίνηση με Απόσβεση	3.17
3.6.2 Απόσβεση Τύπου Rayleigh.....	3.18

Κεφάλαιο 4 Έδραση και Ταλαντώσεις Μηχανών

4.1 Απλό Μοντέλο Έδρασης Μηχανής	4.1
4.2 Έδραση Μηχανής σε Κατακόρυφη Διέγερση.....	4.3
4.3 Έδραση Μηχανής σε Κατακόρυφη και Οριζόντια Διέγερση	4.6
4.4 Μείωση των Ταλαντώσεων Μηχανών	4.12
4.4.1 Μείωση των Ευθύγραμμων Ταλαντώσεων με την Αύξηση των Βαθμών Ελευθερίας	4.12
4.4.2 Μείωση των Στρεπτικών Ταλαντώσεων - Πρόσθεση Βαθμών Ελευθερίας	4.15
4.5 Απόσβεση Ταλαντώσεων	4.18
4.6 Στρεπτικές Ταλαντώσεις Στροφέων Ενεργειακών Μηχανών	4.21

4.6.1 Μοντέλο Στροφέα με 2 Βαθμούς Ελευθερίας.....	4.21
4.6.2 Μοντέλο Στροφέα με N Βαθμούς Ελευθερίας.....	4.23

Κεφάλαιο 5 Δυναμική Στροφέων

5.1 Ρότορας Jeffcott - Ανελαστικά Έδρανα	5.1
5.2 Ρότορας Jeffcott - Εύκαμπτα Έδρανα	5.4
5.3 Γυροσκοπικά Φαινόμενα Στροφέων	5.9
5.4 Υδροδυναμικά Έδρανα.....	5.17
5.4.1 Δυναμικές Ιδιότητες των Υδροδυναμικών Έδρανων	5.17
5.4.2 Άκαμπτος Στροφέας σε Υδροδυναμικά Έδρανα.....	5.19
5.5 Έδρανα Κύλισης	5.21
5.6 Ρότορας με Εγκάρσια Ρωγμή.....	5.29

Κεφάλαιο 6 Δυναμική Μεταφορικών Μέσων

6.1 Διαμήρης Δυναμική Οχήματος.....	6.1
6.2 Απλοποιημένη Δυναμική Οχήματος	6.3
6.3 Δυναμική Αεροσκάφους (3D-κίνηση)	6.7
6.4 Ελεγχόμενη Κίνηση Αεροσκάφους.....	6.12
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	6.15
6.5 Κίνηση Πλοίου γύρω από τον x-Αξονα του.....	6.19

Κεφάλαιο 7 Αριθμητική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων Κίνησης

7.1 Εξισώσεις Κίνησης	7.1
7.2 Η Μέθοδος Runge-Kutta.....	7.2
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	7.3
7.3 Η Μέθοδος των 2-Σημείων.....	7.5
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	7.7
7.6 Ακρίβεια και Ευστάθεια των Μεθόδων Ολοκλήρωσης	7.9
7.7 Η Μέθοδος Wilson	7.12
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.....	7.13

Κεφάλαιο 8 Ιδιοανυσματική Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων

8.1 Περιορισμένη Βάση Ιδιοανυσμάτων	8.1
---	-----

8.2 Προσδιορισμός των Ιδιοσυχνοτήτων μέσω της Συνάρτησης Μεταφοράς	8.4
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.....	8.4
8.3 Υπολογισμός των Ιδιοσυχνοτήτων και Ιδιοανυσμάτων με τη Μέθοδο Rayleigh-Ritz.....	8.6
8.4 Υπολογισμός των Ιδιοσυχνοτήτων με τη Μέθοδο Jacobi	8.8
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.....	8.9

Κεφάλαιο 9 Συνεχή Δυναμικά Συστήματα

9.1 Γενικευμένες Διαφορικές Εξισώσεις Συνεχών Μέσων	9.1
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	9.3
9.1.1 Δοκός σε Εφελκυσμό.	9.3
9.1.2 Δοκός σε Στρέψη.	9.4
9.1.3 Μονοδιάστατη Ροή Ρευστού.	9.5
9.1.4 Μονοδιάστατη Μετάδοση Θερμότητας	9.6
9.2 Γραμμικοί και Επιφανειακοί Φορείς	9.7
9.3 Προβλήματα Δυναμικής Διαφορικών	
Εξισώσεων 2ης Τάξης.....	9.13
9.3.1 Διαφορικές Εξισώσεις.....	9.13
9.3.2 Η Υπόθεση Fourier	9.14
9.3.3 Επίλυση των Εξισώσεων	9.18
9.3.3.1 Δοκός σε Στρέψη - Ελεύθερη Ταλάντωση.....	9.18
9.3.3.2 Δοκός σε Στρέψη με λεπτό Δίσκο Ροπής Αδράνειας I_p - Ελεύθερη ταλάντωση.....	9.20
9.3.3.4 Δοκός σε Στρέψη - Εξαναγκασμένη Ταλάντωση.	9.20
9.4 Προβλήματα Δυναμικής Διαφορικών	
Εξισώσεων 4ης Τάξης	9.21

Κεφάλαιο 10 Μοντελοποίηση Συνεχών Μέσων

10.1 Γενική Μεθοδολογία.....	10.1
10.2 Παραδείγματα.....	10.2
10.2.1 Διακριτό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας για μία Δοκό σε Εφελκυσμό με Διακριτή Μάζα M.....	10.2
10.2.2 Διακριτό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας για έναν Στροφέα Συζευγμένο με Μειωτήρα.	10.4

10.2.3 Διακριτό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας για μία Πακτωμένη Δοκό σε Κάμψη.....	10.5
--	------

Κεφάλαιο 11 Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

11.1 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	11.1
11.1.1 Διαίρεση μίας Κατασκευής σε Πεπερασμένα Στοιχεία.....	11.1
11.1.2 Μοντελοποίηση σε Επίπεδο Πεπερασμένου Στοιχείου.....	11.3
11.1.3 Επανασύνδεση των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	11.4
11.1.4 Μοντελοποίηση Πεπερασμένων Στοιχείων με την Μέθοδο των Δυνατών Έργων.....	11.7
11.1.5 Συναρτήσεις Μορφής, των Μητρώων Μάξας, Δυσκαμψίας και του Διανύσματος Φόρτισης.....	11.8
11.1.6 Μοντελοποίηση Πεπερασμένων Στοιχείων με την Μέθοδο Lagrange	11.9
11.2 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων σε Δυναμικά Προβλήματα Διαφορικών Εξισώσεων 2 nd Τάξης.....	11.12
11.2.1 Στρεπτικές Ταλαντώσεις ενός Στροφέα Μεταβλητής Διατομής.....	11.12
11.2.2 Στρεπτικές Ταλαντώσεις ενός Στροφέα Μεταβλητής Διατομής με Πρόσθετη Διακριτή Μάξα	11.14
11.2.3 Ιδιοσυχνότητες Εξάτμισης Μηχανής Εσωτερικής Καύσης.	11.15
11.3 Πεπερασμένα Στοιχεία Δοκού σε Κάμψη	11.17
11.3.1 Θεωρία	11.17
11.3.2 Παραδείγματα	11.20
11.3.2.1 Καμπτικές Ιδιοσυχνότητες ενός Στροφέα Μεταβλητής Διατομής	11.20
11.3.2.2 Καμπτικές Ιδιοσυχνότητες Έδρασης Μηχανής	11.24
11.3.2.3 Ταλαντώσεις Υπερκατασκευής Πλοίου.....	11.27
11.4 Καθολικοί και Τοπικοί Βαθμοί Ελευθερίας.....	11.29
11.4.1 Περιστροφή του Τοπικού Συστήματος Συντεταγμένων έναντι του Καθολικού	11.29
11.4.2 Παραδείγματα Εφαρμογής του ψ- Μετασχηματισμού.....	11.32
11.4.2.1 Πεπερασμένο Στοιχείο Δικτυώματος.	11.32
11.4.2.2 Δυναμική Συμπεριφορά ενός Δικτυώματος 2 Ράβδων.....	11.34
11.4.2.3 Δυναμική Συμπεριφορά ενός Πλαισίου.	11.36

11.5 Δυναμική Στροφέων με Πεπερασμένα	Στοιχεία.....	11.40
11.5.1 Μοντελοποίηση.....		11.40
11.5.2 Παράδειγμα Υπολογισμού		11.43

Κεφάλαιο 12 Βελτιστοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

12.1 Εισαγωγή.....	12.1
12.2 Βελτιστοποίηση του Φυσικού Συστήματος.....	12.3
12.3 Έλεγχος Δυναμικών Συστημάτων	12.8
12.3.1 Τεχνητά Ελατήρια και Αποσβεστήρες	12.8
12.3.2 Τεχνητές Μάζες και Έλεγχος Μετατοπίσεων	12.10
12.4 Παραδείγματα Ελεγχόμενων Δυναμικών Συστημάτων.....	12.12
12.4.1 Επίτευξη Ιδιοτήτων ζ -ω	12.12
12.4.2 Επίτευξη Επιθυμητής Απόκρισης	12.13
12.4.3 Επίτευξη Επιθυμητής Απόκρισης με $F_{\varepsilon,lim}$	12.15
12.4.4 Επίτευξη Επιθυμητής Απόκρισης με $F_{\varepsilon,lim}$ και F_{δ}	12.17
12.5 Οδήγηση Δυναμικών Συστημάτων	12.19
12.5.1 Οδήγηση Τύπου “Bang-Bang”	12.19
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	12.22
12.5.2 Κινηματικού και Δυναμικού Τύπου Οδήγηση.....	12.23
12.5.3 Οδήγηση ή Έλεγχος;	12.25

Κεφάλαιο 13 Ανάλυση Συχνότητας Σημάτων

13.1 Έννοια του Σήματος	13.1
13.2 Ανάλυση Συχνότητας - Σειρά Fourier	13.3
13.3 Φάσμα Σήματος	13.9
13.4 Μετασχηματισμός Fourier	13.12
13.5 Συνέλιξη.....	13.17
13.6 Συσχέτιση Σημάτων	13.21
13.7 Διαμορφωμένα Σήματα - Αποδιαμόρφωση	13.25

Κεφάλαιο 14 Επεξεργασία Σημάτων

14.1 Διακριτά Σήματα - Θεώρημα Δειγματοληψίας	14.1
14.2 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Σήματος.....	14.3
14.3 Διακριτός Μετασχηματισμός (DFT)	14.5
14.4 Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)	14.8
14.5 Περιορισμοί του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier	14.11

Κεφάλαιο 15 Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

15.1 Εισαγωγή.....	15.1
15.2 Συντηρητικά Δυναμικά Συστήματα.....	15.4
15.3 Ελεύθερη Κίνηση μη Συντηρητικών Δυναμικών Συστημάτων	15.9
15.3.1 Ιξώδης Απόσβεση - Απόσβεση Rayleigh	15.9
15.3.2 Ρευστοδυναμική Απόσβεση.....	15.10
15.3.3 Ξηρά Απόσβεση (Απόσβεση Coulomb)	15.10
15.3.4 Υστερητική Απόσβεση	15.11
15.3.5 Αρνητική Απόσβεση Λόγω Τριβής.....	15.12
15.3.6 Ταλαντωτές Rayleigh και Van Der Pol.....	15.16
15.4 Περιοδικές Διεγέρσεις και Αποκρίσεις	15.18
15.4.1 Ταλαντωτής Duffing	15.19
15.4.2 Ταλαντωτής Van Der Pol	15.23
15.4.3 Παραμετρικά Δυναμικά Συστήματα.....	15.24
15.5 Μη Περιοδικές και Χαοτικές Αποκρίσεις	15.27

Κεφάλαιο 16 Κραδασμοί και Διάγνωση Βλαβών

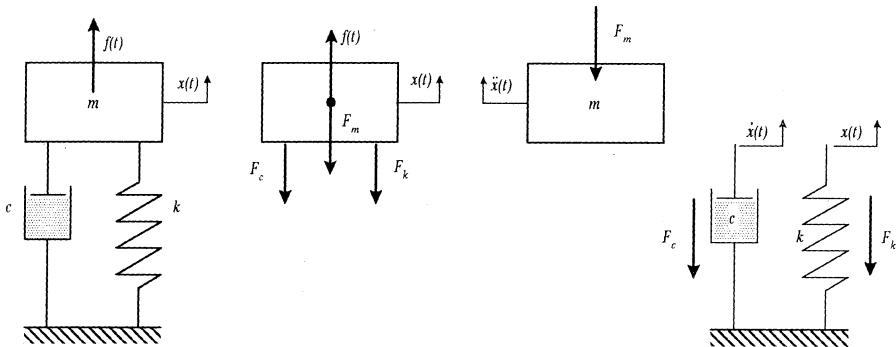
16.1 Εισαγωγή.....	16.1
16.2 Αισθητήρια Κραδασμών	16.2
16.3 Μέτρηση Κραδασμών	16.11
16.4 Διάγνωση Βλαβών	16.14
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 16.A Συνηθέστερα Διεθνή Πρότυπα Κραδασμών	16.32

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

Δυναμικό Σύστημα με 1 Βαθμό Ελευθερίας

1.1 Εισαγωγή



Σχήμα 1.1: Δυναμικό σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας. Φαίνονται οι δυνάμεις αδράνειας F_m , απόσβεσης F_c και οι ελαστικές δυνάμεις F_k , καθώς και τα αντίστοιχα στοιχεία συσσώρευσης κινητικής (m), δυναμικής (k) και διάχυσης ενέργειας (c).

Η δυναμική ενός συστήματος με έναν βαθμό ελευθερίας (Σχήμα 1.1) περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι οι εξωτερικές δυνάμεις $f(t)$ βρίσκονται σε κάθε χρονική στιγμή t σε ισορροπία με

- τις δυνάμεις αδράνειας $F_m = m \cdot d^2 x / dt^2$,
- τις δυνάμεις απόσβεσης $F_c = c \cdot dx / dt$ και
- τις ελαστικές δυνάμεις $F_k = kx$.

Σε αντιστοιχία με τις παραπάνω δυνάμεις, τα στοιχεία του δυναμικού συστήματος διακρίνονται ως εξής:

- Στοιχείο συσσώρευσης “κινητικής ενέργειας”
- Στοιχείο “διάχυσης ενέργειας” και
- Στοιχείο συσσώρευσης “δυναμικής ενέργειας”.

Εάν οι δυνάμεις που ενεργούν στην μάζα m πολλαπλασιαστούν με την μεταβολή της μετατόπισης “ δx ”, τότε προκύπτει άμεσα το δυνατό έργο δW :

$$\begin{aligned}\delta W &= -m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x - c \frac{dx}{dt} \delta x - kx \delta x + f(t) \delta x \\ &= (-m \frac{d^2 x}{dt^2} - c \frac{dx}{dt} - kx + f(t)) \cdot \delta x = 0\end{aligned}$$

Στη συνέχεια είναι δυνατόν αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης κίνησης να διαιρεθούν με την μάζα m , οπότε:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m} \quad (2\zeta\omega = \frac{c}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m})$$

Οι συντελεστές ζ και ω ονομάζονται “συντελεστής απόσβεσης” και “φυσική συχνότητα του συστήματος”.

1.2 Ελεύθερη Κίνηση

Η ελεύθερη κίνηση χαρακτηρίζεται από την έλλειψη εξωτερικών δυνάμεων ($f(t)=0$) και συνεπώς από την “ομογενή” διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι του τύπου:

$$x(t) = e^{st}$$

Το αντίστοιχο “χαρακτηριστικό πολυώνυμο” $D(s)$ είναι δευτέρου βαθμού:

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$$

και έχει τις ρίζες:

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \cdot \omega$$

Οι ρίζες $s_{1,2}$ καθορίζουν μονοσήμαντα τη μορφή της ελεύθερης κίνησης.

- Στην περίπτωση $\zeta < 0$ η ελεύθερη κίνηση είναι ταλαντωτικής μορφής με συχνότητα

$$\omega_n = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega$$

που αποσβένεται εκθετικά, με εκθέτη απόσβεσης “ $\zeta\omega$ ”. Ως “μέτρο απόσβεσης Z ” ορίζεται ο λογάριθμος του λόγου δύο συνεχών μεγίστων θετικών τιμών στους χρόνους “ t ” και “ $t+T_n$ ”

$$Z = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_n)}\right) = \frac{2\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi c}{\omega_n}$$

με

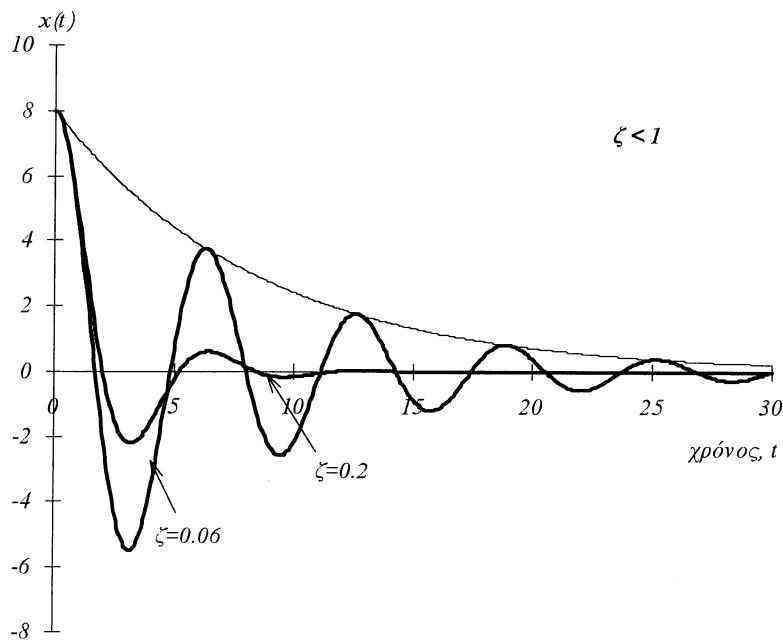
$$T_n = 2\pi / \omega_n$$

- Στην περίπτωση $0 < \zeta \geq 1$ η ελεύθερη κίνηση είναι εκθετικής μορφής. Για $\zeta > 1$ η κίνηση αποσβένεται, ενώ για $\zeta < 0$ αποκλίνει και τείνει προς το ∞ .

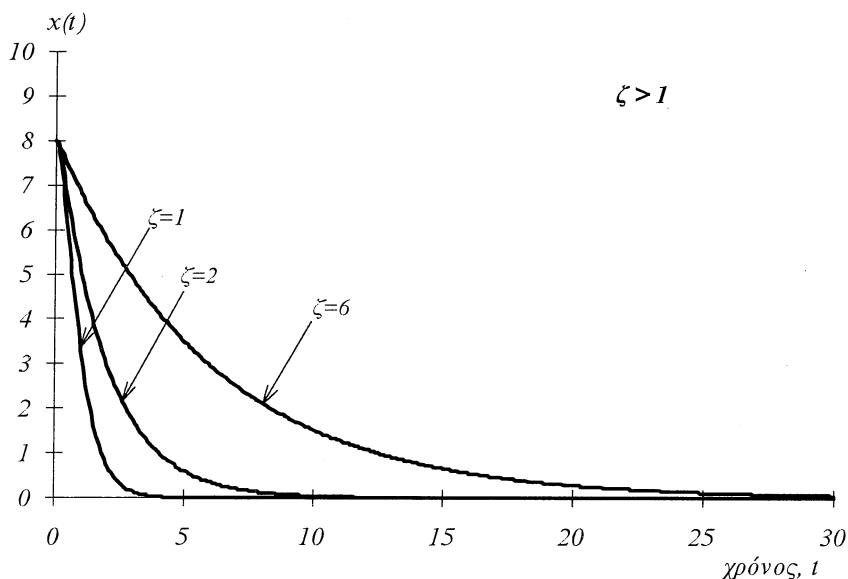
Οι παραπάνω περιπτώσεις συνοψίζονται στον εξής πίνακα:

Πίξες	Λύση
$\zeta > 1$ $s_{1,2} = \text{Πραγματικές ρίζες}$	$x(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left[x(0)(-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}) + \dot{x}(0)(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \right]$
$\zeta = 1, s_{1,2} = -\omega$	$x(t) = e^{-\omega t} \left[(\dot{x}(0) + \omega \cdot x(0))t + x(0) \right]$
$\zeta < 1$ $s_{1,2} = \text{Συγχρόνες Μιγαδικές}$ $s_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega_n$ $\omega_n = (\sqrt{1 - \zeta^2}) \cdot \omega$	$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[x(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega x(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$

Στο επόμενο Σχήμα 1.2 απεικονίζονται οι μορφές της ελεύθερης κίνησης για $\zeta < 1$ και $\zeta = 1$ και $\zeta > 1$.

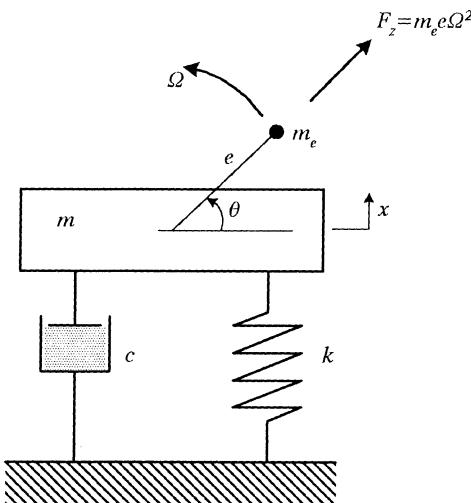


Σχήμα 1.2α: Ελεύθερη κίνηση δυναμικού συστήματος για διάφορες χαρακτηριστικές τιμές της απόσβεσης $\zeta < 1$.



Σχήμα 1.2β: Ελεύθερη κίνηση δυναμικού συστήματος για διάφορες χαρακτηριστικές τιμές της απόσβεσης ζ .

1.3 Εξαναγκασμένη Κίνηση - Τύποι Διεγέρσεων



Σχήμα 1.3: Διεγέρση ενός δυναμικού συστήματος $m-c-k$ από φυγοκεντρική δύναμη $F_z = m_e e \Omega^2$.

Η εξαναγκασμένη κίνηση προκύπτει από την ύπαρξη εξωτερικών διεγέρσεων (δυνάμεων “ $f(t)$ ” ή κινηματικών διεγέρσεων $X_o(t)$ που οδηγούν σε δυνάμεις “ $k \cdot X_o(t)$ ”) οι οποίες κατατάσσονται στις εξής κατηγορίες:

A. Περιοδικές διεγέρσεις (Σχήμα 1.3)

$$f(t) = F_z \sin \Omega t$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα περιοδικής διεγέρσης είναι η διεγέρση μίας εδρασμένης μηχανής με μάζα m (c, k =σταθερές απόσβεσης και ελαστικότητας του εδάφους) από μη ζυγοσταθμισμένες μάζες m_e :

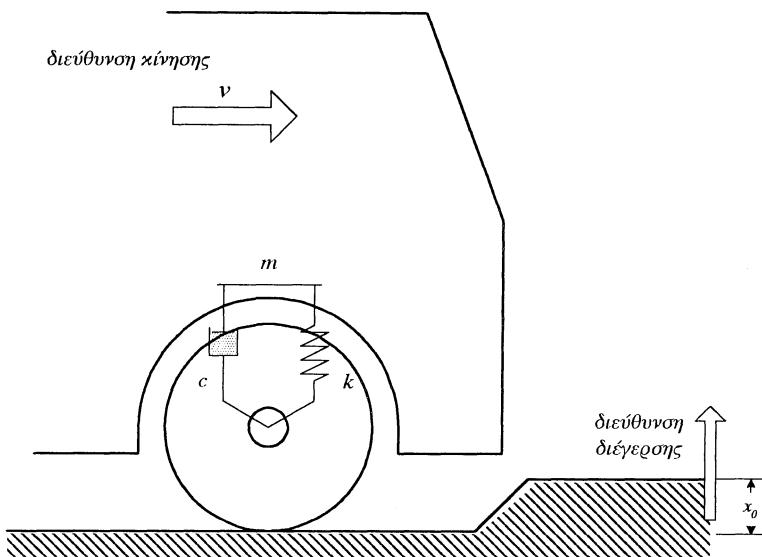
$$F_z = m_e e \Omega^2$$

Η F_z είναι ανάλογη της εκκεντρότητας “ e ” της μάζας “ m_e ” και του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας Ω . Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m} = \frac{m_e e \Omega^2}{m} \sin \Omega t$$

B. Διεγέρσεις “μεταβατικής” μορφής (Σχήμα 1.4)

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$



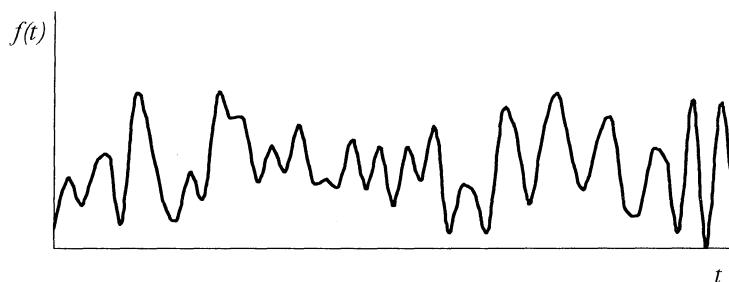
Σχήμα 1.4: Τροχός αυτοκινήτου που δέχεται μεταβατική διέγερση καθώς προσκρούει σε ανωμαλία του δρόμου.

με a_f =σταθερές. Μία τυπική μορφή μεταβατικής διέγερσης είναι η βηματική διέγερση από μία στάθιμη ηρεμίας σε μία άλλη. Π.χ. ένα αυτοκίνητο που συναντά ένα εμπόδιο στον δρόμο (βλ. παραπάνω). Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m} = \omega^2 X_o(t) \quad X_o(t) = \begin{cases} = x_o(t/T) & t \leq T \\ = x_o & t > T \end{cases}$$

όπου T είναι ο χρόνος της βηματικής διάρκειας.

Γ. Μη επαναλαμβανόμενες διεγέρσεις “τυχαίας” μορφής (Σχήμα 1.5)



Σχήμα 1.5: Τυχαία ή μη-επαναλαμβανόμενη διέγερση

Τυχαίες διεγέρσεις εκφράζονται μαθηματικά από μία σειρά Fourier με περίοδο $T \Rightarrow \infty$ που τείνει προς το άπειρο:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{ci} \cos \frac{2\pi i}{T} t + F_{si} \sin \frac{2\pi i}{T} t \quad (T \Rightarrow \infty)$$

όπου F_{ci} και F_{si} είναι οι συντελεστές των συνημίτονων και των ημίτονων αντίστοιχα.

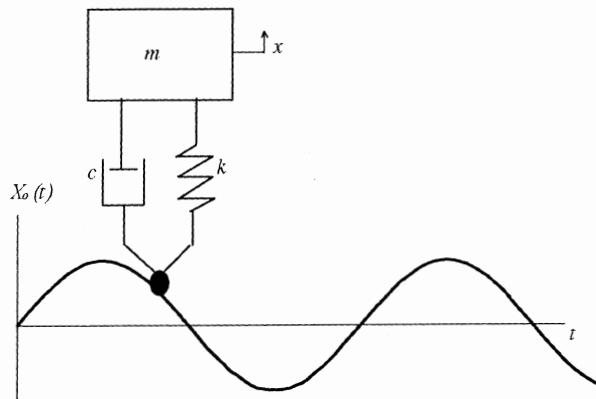
Τυχαίες διεγέρσεις προέρχονται από την κίνηση μέσα σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον, όπως π.χ. η κίνηση ενός αεροσκάφους σε ατμοσφαιρικές διαταραχές, η κίνηση ενός οχήματος σε ανώμαλο αγροτικό δρόμο, κ.λ.π.

Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m} = \frac{1}{m} \sum_i (F_{ci} \cos \frac{2\pi i}{T} t + F_{si} \sin \frac{2\pi i}{T} t)$$

1.4 Περιοδική Διέγερση

1.4.1 Μόνιμη Απόκριση



Σχήμα 1.6: Παράδειγμα αρμονικής διέγερσης: Όχημα σαν μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα κινείται σε δρόμο με αρμονικό προφίλ

Η απόκριση ενός δυναμικού μονοβάθμιου συστήματος που διεγείρεται αρμονικά (Σχήμα 1.6):

$$f(t) = F_c \cos \Omega t + F_s \sin \Omega t$$

δίνεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_c \cos \Omega t + F_s \sin \Omega t}{m}$$

Στη περίπτωση που η διέγερση είναι κινηματική (π.χ. ένα όχημα που κινείται σε ανώμαλο δρόμο με προφίλ αρμονικής συνάρτησης $X_o(t)$ με συχνότητα Ω), η δύναμη $f(t)$ είναι ίση με:

$$f(t) = kX_o(t) = k(X_{co} \cos \Omega t + X_{so} \sin \Omega t)$$

και προσδιορίζεται από τους συντελεστές X_{co} και X_{so} που περιγράφουν το προφίλ του δρόμου. Η περιοδική διέγερση μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή μίας αρμονικής συνάρτησης με εύρος “ F ” και διαφορά φάσης “ a ”

$$\begin{aligned} f(t) &= F \cos(\Omega t + a) \\ &= \underbrace{(F \cos a)}_{F_c} \cos \Omega t + \underbrace{(-F \sin a)}_{F_s} \sin \Omega t \end{aligned}$$

Από τη σύγκριση των δύο μαθηματικών εκφράσεων υπολογίζονται τα μεγέθη F_c και F_s :

$$F_c = F \cos a$$

$$F_s = -F \sin a$$

και στη συνέχεια:

$$F = \sqrt{F_c^2 + F_s^2}$$

$$\tan a = \frac{-F_s}{F_c}$$

Στη περίπτωση $\xi < 1$ η παραπάνω εξίσωση έχει την εξής “ομογενή” (x_h) και “μερική” (x_p) λύση:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t)$$

$$x_p(t) = P_c \cos \Omega t + P_s \sin \Omega t$$

Η συνάρτηση $x_h(t)$, αντιστοιχεί σε μια αποσβενόμενη ταλάντωση. Δηλαδή, ύστερα από ένα χρονικό διάστημα T_h θα είναι $x_h(t) \Rightarrow 0$ και συνεπώς θα παραμείνει μόνο η μόνιμη απόκριση του συστήματος $x_p(t)$. Οι συντελεστές

της μόνιμης απόκρισης P_c και P_s υπολογίζονται από την ικανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} & -\Omega^2(P_c \cos \Omega t + P_s \sin \Omega t) + 2\zeta\omega\Omega(-P_c \sin \Omega t + P_s \cos \Omega t) + \omega^2(P_c \cos \Omega t + P_s \sin \Omega t) \\ & = \frac{1}{m}(F_c \cos \Omega t + F_s \sin \Omega t) \end{aligned}$$

Από τη σύγκριση των όρων με κοινό παράγοντα το ημίτονο και συνημίτονο, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2)P_c + 2\zeta\omega\Omega P_s &= \frac{1}{m}F_c \\ -2\zeta\omega\Omega P_c + (\omega^2 - \Omega^2)P_s &= \frac{1}{m}F_s \end{aligned}$$

και μετά τη διαίρεση των εξισώσεων με ω^2 και την εισαγωγή των συναρτήσεων $\kappa(\Omega)$ και $\lambda(\Omega)$:

$$\kappa(\Omega) = 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \quad \lambda(\Omega) = 2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$$

τα μεγέθη P_c και P_s προκύπτουν ίσα με:

$$P_c = \frac{1}{k} \cdot \frac{F_c \cdot \kappa(\Omega) - F_s \cdot \lambda(\Omega)}{\kappa(\Omega)^2 + \lambda(\Omega)^2}$$

$$P_s = \frac{1}{k} \cdot \frac{F_c \cdot \lambda(\Omega) + F_s \cdot \kappa(\Omega)}{\kappa(\Omega)^2 + \lambda(\Omega)^2}$$

1.4.2 Συνάρτηση Μεταφοράς

Η μερική λύση

$$x_p(t) = P_c \cos \Omega t + P_s \sin \Omega t$$

μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$$x_p(t) = P \cos(\Omega t + \phi)$$

όπου

$$P = \sqrt{P_c^2 + P_s^2} = \sqrt{\frac{F_c^2 + F_s^2}{\kappa(\Omega)^2 + \lambda(\Omega)^2}} = \frac{(F/k)}{\sqrt{\kappa(\Omega)^2 + \lambda(\Omega)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{-P_s}{P_c} = -\frac{F_c \lambda(\Omega) + F_s \kappa(\Omega)}{F_c \kappa(\Omega) - F_s \lambda(\Omega)}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις P είναι το εύρος και φ η διαφορά φάσης. Τα μεγέθη P και φ είναι συναρτήσεις της συχνότητας διέγερσης Ω του δυναμικού συστήματος.

Η προκύπτουσα σχέση “εύρος απόριτσης P προς εύρος διέγερσης F/k ” αποκαλείται “Συνάρτηση Μεταφοράς $H(\Omega)$ ”:

$$\frac{P}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{\kappa(\Omega)^2 + \lambda(\Omega)^2}} = H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + [2\zeta\Omega/\omega]^2}}$$

Η “Διαφορά Φάσης $\psi(\Omega)$ ” μεταξύ της διέγερσης F και της μόνιμης απόριτσης P του δυναμικού συστήματος είναι ίση με:

$$\begin{aligned}\psi(\Omega) &= \varphi - \alpha \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{-P_s}{P_c}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-F_s}{F_c}\right)\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις απεικονίζονται για $\alpha=0$ στα Σχήματα 1.7 και 1.8.

Στη “Συχνότητα Συντονισμού”, δηλαδή στην συχνότητα διέγερσης Ω που είναι ίση την ιδιοσυχνότητα του δυναμικού συστήματος χωρίς απόσβεση ω , προκύπτουν οι εξής τιμές για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$ και την διαφορά φάσης $\psi(\Omega)$:

$$\begin{aligned}H(\Omega)_{\Omega=\omega} &= \frac{1}{2\zeta} \\ \psi(\Omega)_{\Omega=\omega+\varepsilon} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -90^\circ\end{aligned}$$

και

$$\psi(\Omega)_{\Omega=\omega-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 90^\circ$$

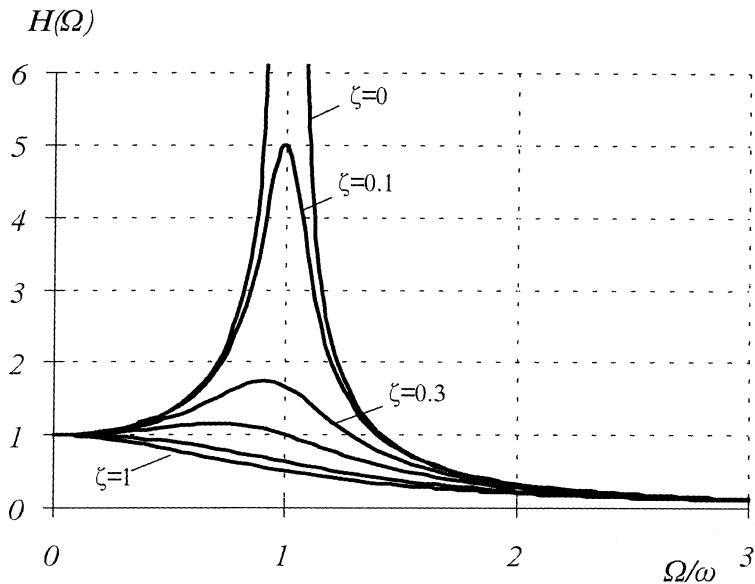
Το συμπέρασμα είναι πως:

⇒ Στην συχνότητα συντονισμού η συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$ έχει εύρος ίσο με $1/2\zeta$.

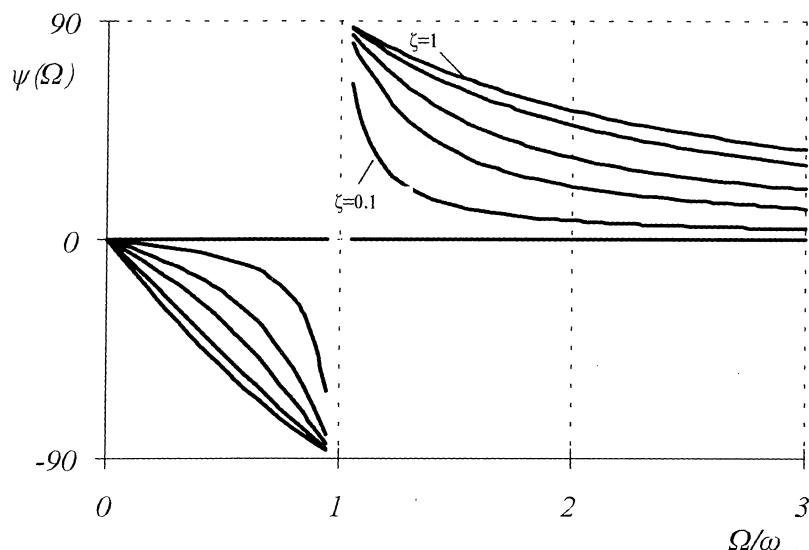
⇒ Αντίστοιχα η διαφορά φάσης $\psi(\Omega)$ που αυξάνεται με Ω αρνητικά μέχρι τη τιμή -90° παίρνει -όταν η συχνότητα διέγερσης Ω ξεπεράσει την ιδιοσυχνότητα ω - τη τιμή 90° .

⇒ Η ξαφνική αλλαγή 180° της διαφοράς φάσης αποτελεί επομένως χαρακτηριστικό του σημείου συντονισμού.

Από τα παραπάνω προκύπτει επίσης ότι εάν πειραματικά διαπιστωθεί το σημείο συντονισμού $\Omega=\omega$ και η τιμή της συνάρτησης μεταφοράς, τότε ο συντελεστής απόσβεσης ζ υπολογίζεται άμεσα από την σχέση $\zeta=1/(2H)$.



Σχήμα 1.7: Μόνιμη απόκριση ενός μονοβάθμιου συστήματος για αρμονική διέγερση: Συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$ για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ .



Σχήμα 1.8: Μόνιμη απόκριση ενός μονοβάθμιου συστήματος για αρμονική διέγερση: Διαφορά φάσης $\psi(\Omega)$ για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ .